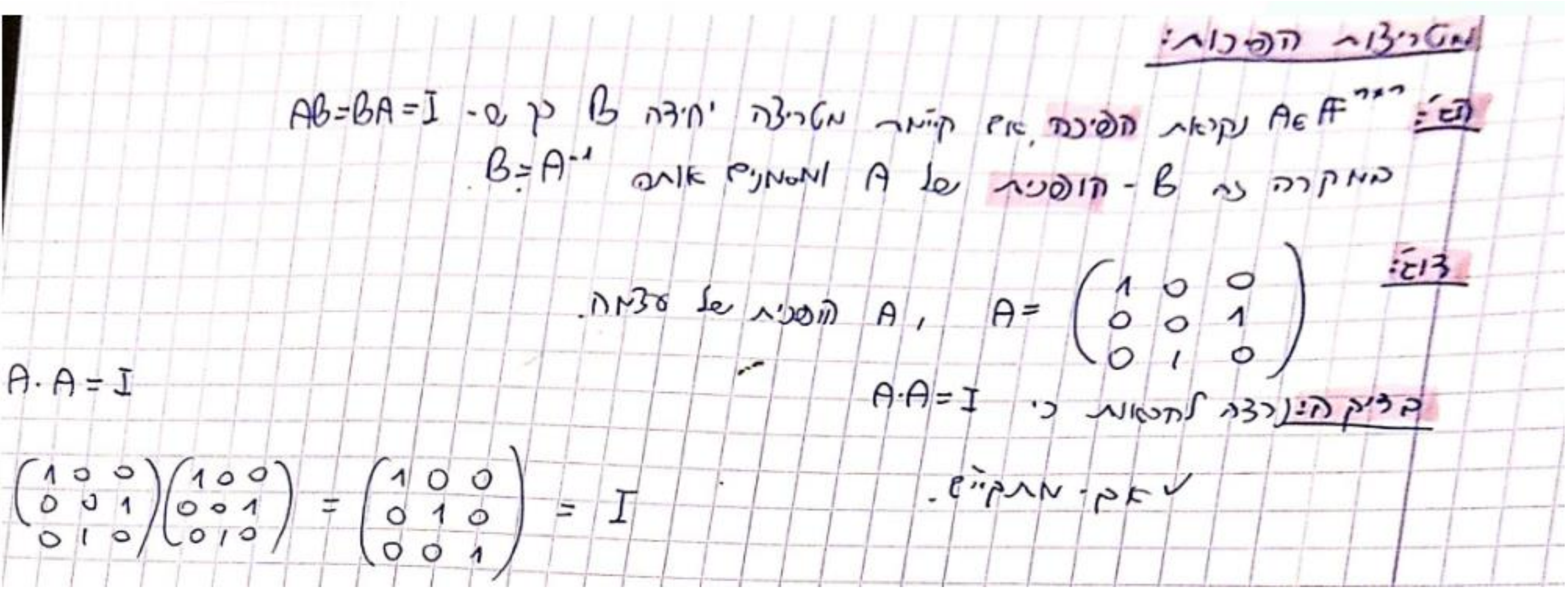
תרגול 4-אושרית

מטריצות הפיכות ומטריצות פעולות שורה אלמנטריות



מטריצות הפיכות:

הגד': $A \in F^{n \times n}$ נקראת **הפיכה**, אם קיימת מטריצה יחידה B כך ש- $AB = BA = I$

במקרה זה B - **הופכית** של A ומסמנים אותה $B = A^{-1}$.

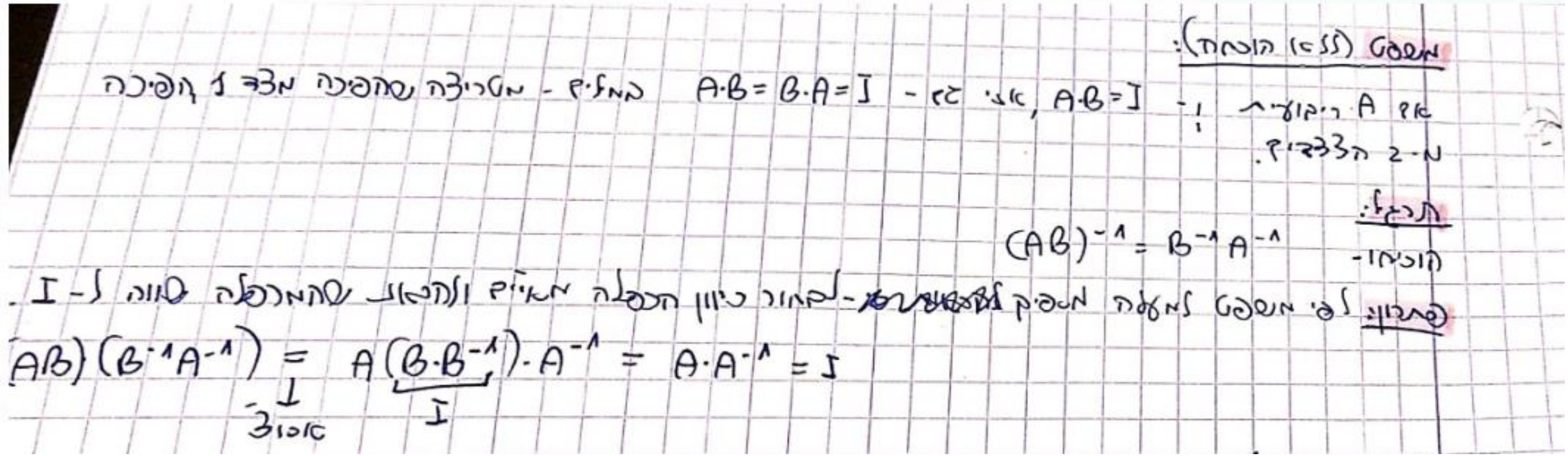
דוג': $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A הופכית של עצמה.

בדיקה: נרצה להראות כי $A \cdot A = I$

$A \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

אכן - מתקיים ✓.



משפט (ללא הוכחה):

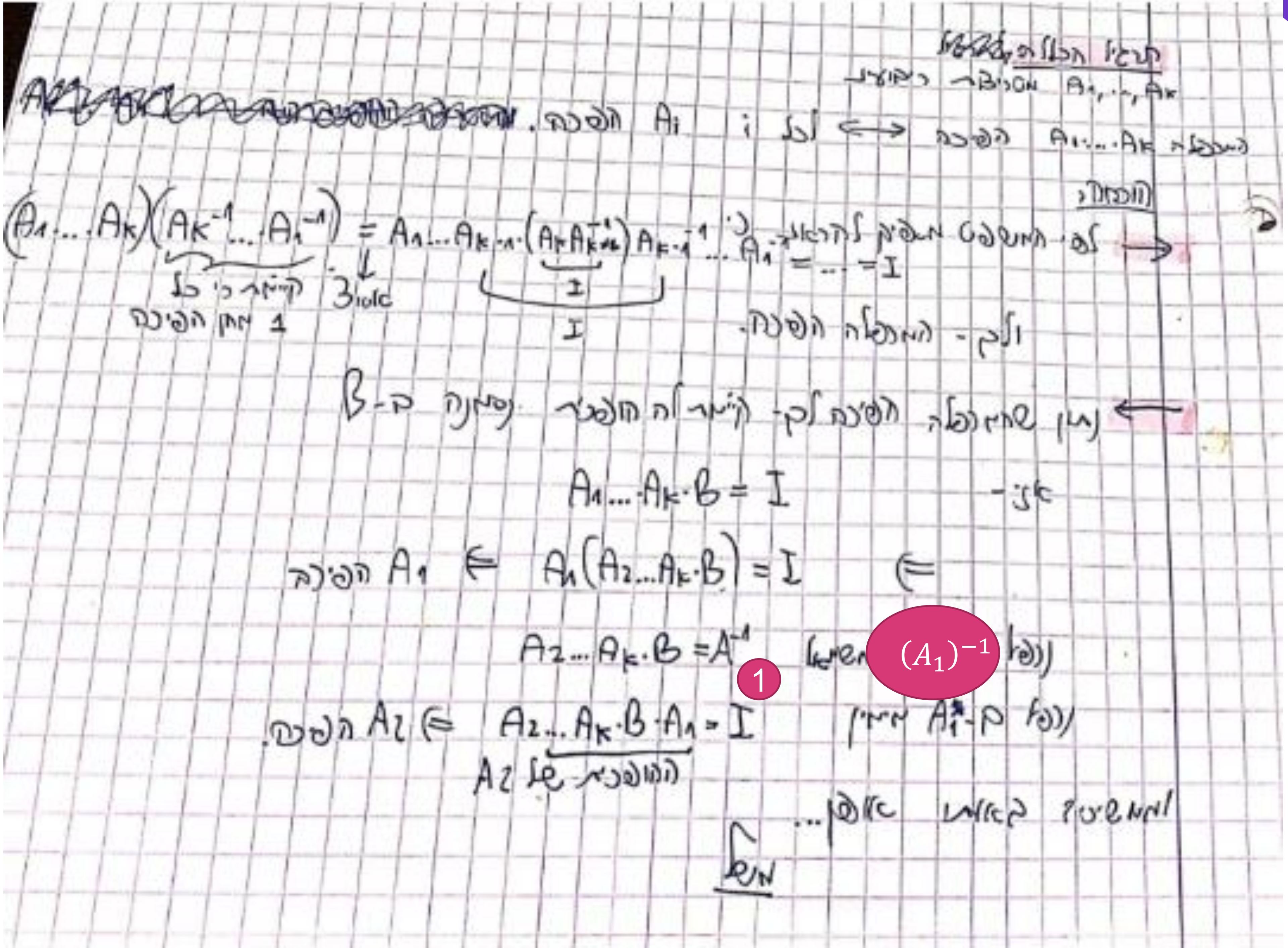
אם A ריבועית ו- $A\cdot B=I$, אזי גם - $A\cdot B=B\cdot A=I$ במילים - מטריצה שהפיכה מצד 1 הפיכה
n-ב הגדלים.

תרגיל:

הוכיחו - $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

פתרון: לפי משפט למעלה מספיק ~~[illegible]~~ - לבחור כיוון הכפלה מאיזה ולהראות שהמכפלה שווה ל- I.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})\underset{\text{אסוצ}}{\underset{I}{=}}A\underbrace{(B\cdot B^{-1})}_{I}\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I$$



תרגיל הכללה

$A_1, \dots, A_k$ מטריצות ריבועיות

המכפלה $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ הפיכה $\Longleftrightarrow$ לכל i A_i הפיכה.

הוכחה:

$\Rightarrow$ לפי המשפט מספיק להראות כי:

$$\underbrace{(A_1 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1})}_{\text{קיימת כי כל 1 מהן הפיכה}} \overset{\text{אסוצ}}{=} A_1 \cdots A_{k-1} \cdot \underbrace{(\underbrace{A_k A_k^{-1}}_{I}) A_{k-1}^{-1}}_{I} \cdots A_1^{-1} = \ldots = I$$

ולכן - המכפלה הפיכה.

$\Leftarrow$ נתון שהמכפלה הפיכה לכן - קיימת לה הופכית נסמנה ב-B

אז -

$$A_1 \cdots A_k \cdot B = I$$

$\Leftarrow$ $A_1(A_2 \ldots A_k \cdot B) = I$ $\Leftarrow$ A_1 הפיכה

נכפיל משמאל ב-$(A_1)^{-1}$

$$A_2 \ldots A_k \cdot B = A^{-1}$$

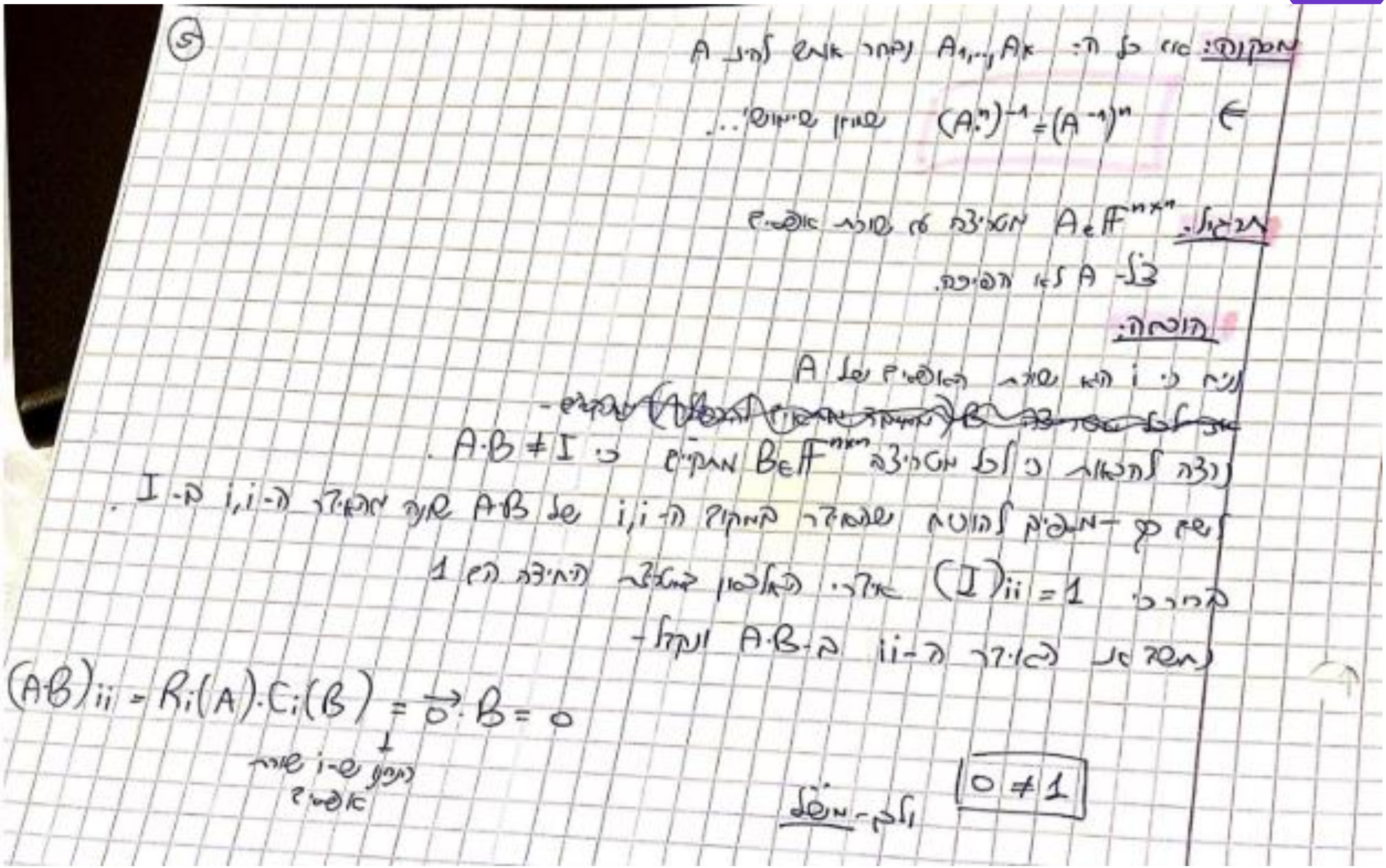
①

נכפיל ב-A_1 מימין

$$\underbrace{A_2 \ldots A_k \cdot B \cdot A_1}_{\text{ההופכית של } A_2} = I \Rightarrow A_2 \text{ הפיכה.}$$

וממשיכים באותו אופן...

מש"ל



⑤

מסקנה: אז כל n: $A_1,\dots,A_k$ נבחר אותם להיות A

$\Leftarrow$ $\boxed{(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n}$ שוויון שימושי!...

תרגיל: $A\in F^{n\times n}$ מטריצה עם שורת אפסים

צ"ל- A לא הפיכה.

הוכחה:

נניח כי i היא שורת האפסים של A

~~אז לכל מטריצה B (ממימד מתאים) (A·B) מתקיים~~ -

נרצה להראות כי לכל מטריצה $B\in F^{n\times n}$ מתקיים כי $A\cdot B\neq I$.

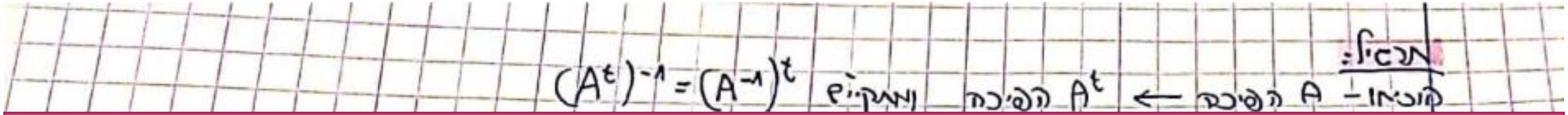
לשם כך - מספיק להוכיח שהאיבר במקום ה-i,i של $A\cdot B$ שונה מהאיבר ה-i,i ב-I.

מהגדרה $(I)_{ii}=1$ איברי האלכסון במטריצת היחידה הם 1

נחשב את האיבר ה-ii ב-$A\cdot B$ ונקבל -

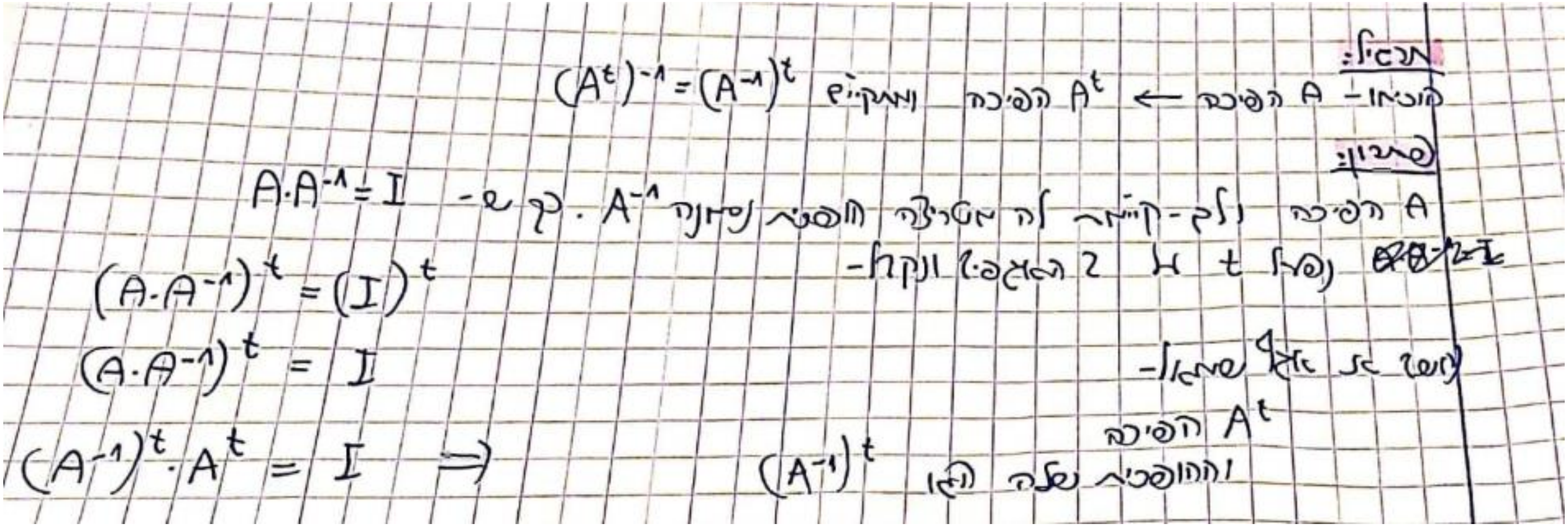
$$(AB)_{ii}=R_i(A)\cdot C_i(B)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{הנחנו ש-i שורת}\\ \text{אפסים}}}{=}\vec{0}\cdot B=0$$

ולכן - משל $\boxed{0\neq 1}$



תרגיל:

הוכיחו - A הפיכה ← A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$



תרגיל:

הוכיחו – A הפיכה ← A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

פתרון:

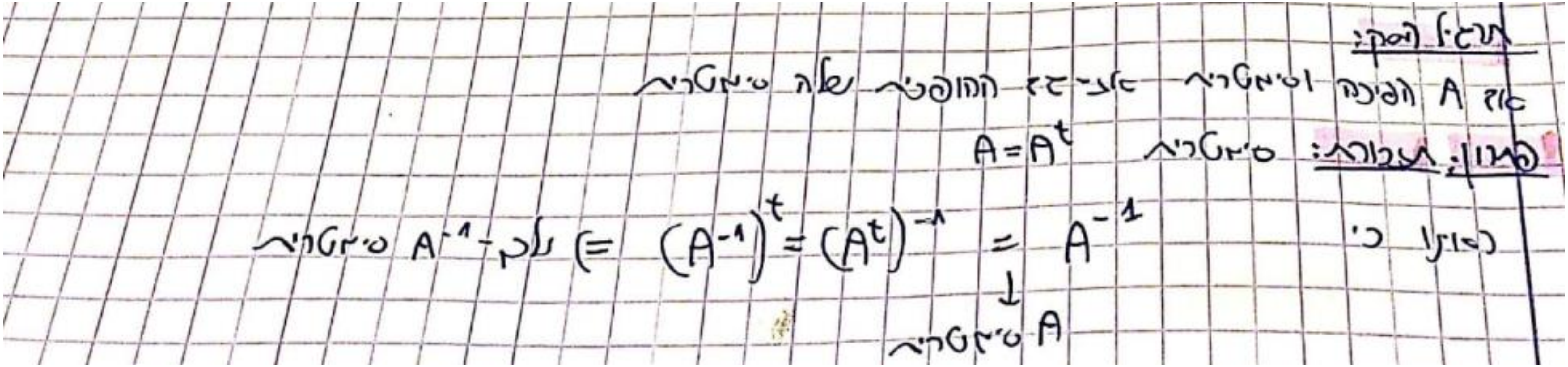
A הפיכה ולכן קיימת לה מטריצה הופכית מימנית A^{-1}. כך ש- $A\cdot A^{-1}=I$

נפעיל t על 2 האגפים ונקבל- $(A\cdot A^{-1})^t=(I)^t$

$(A\cdot A^{-1})^t = I$

(נשתמש בכלל 4 שמאלי-

$(A^{-1})^t\cdot A^t = I \Rightarrow$ A^t הפיכה וההופכית שלה היא $(A^{-1})^t$



תרגיל נוסף:

אם A הפיכה וסימטרית אזי גם ההופכית שלה סימטרית

פתרון: **תזכורת:** סימטרית $A=A^t$

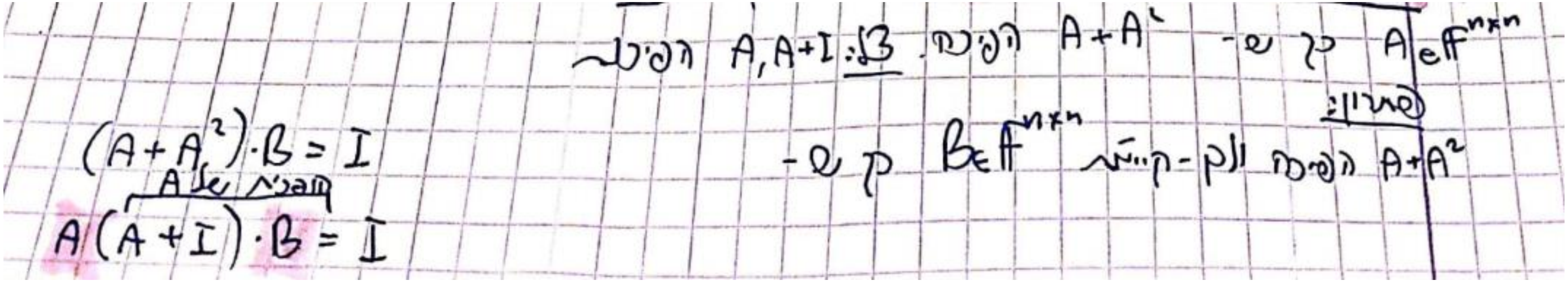
נראה כי $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{A סימטרית}}}{=} A^{-1}$ $\Leftarrow$ ולכן A^{-1} סימטרית

תרגיל:

$A \in F^{n \times n}$ כך ש- $A+A^2$ הפיכה. צ"ל: $A, A+I$ הפיכות

[redacted]

תרגיל:



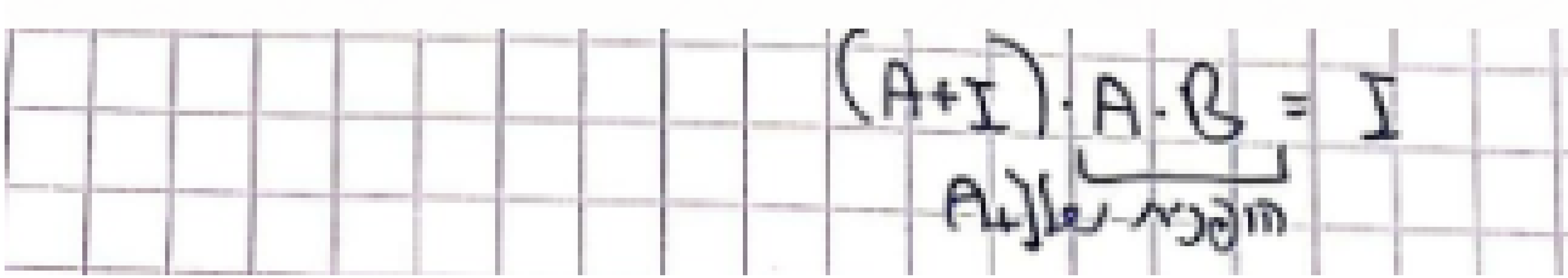
תהא $A \in F^{n\times n}$ כך ש- $A+A^2$ הפיכה. צ"ל: $A, A+I$ הפיכות

פתרון:

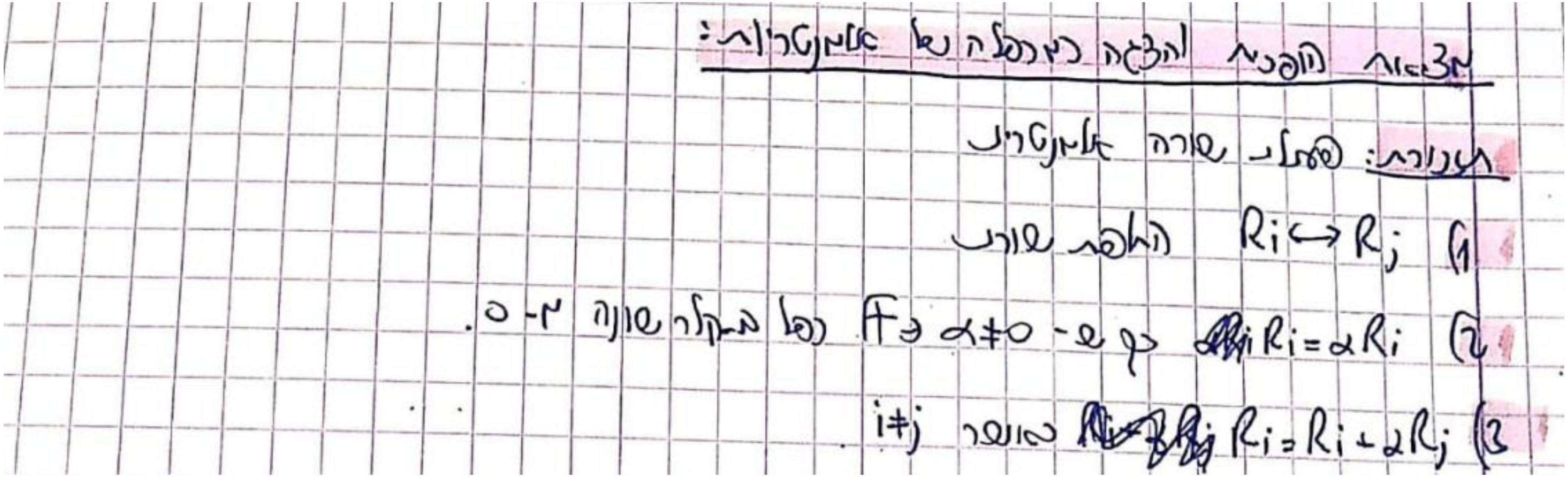
$A+A^2$ הפיכה ולכן קיימת $B \in F^{n\times n}$ כך ש-

$$(A+A^2)\cdot B = I$$

$$A\overbrace{(A+I)\cdot B}^{\text{הופכית של } A} = I$$



$$(A+I)\cdot \underbrace{A\cdot B}_{\text{הופכית של } A+I} = I$$



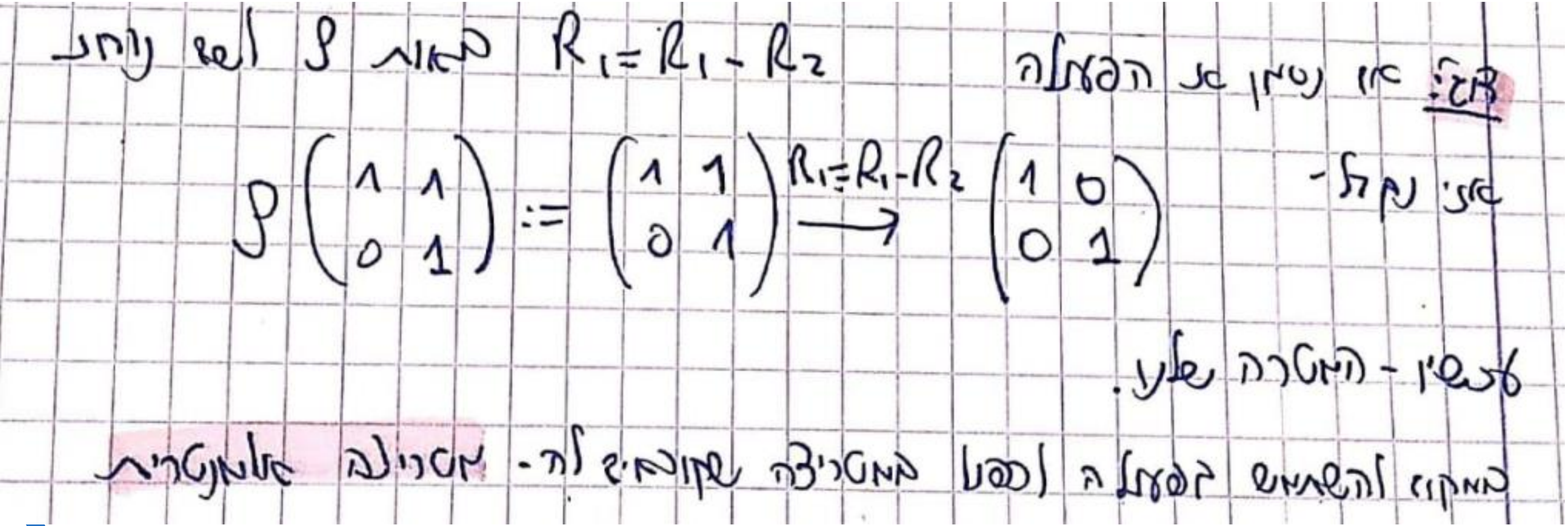
מציאת הופכית והצגה כמכפלה של אלמנטריות:

תזכורת: פעולת שורה אלמנטרית

1) $R_i \leftrightarrow R_j$ החלפת שורות

2) $R_i = \alpha R_i$ כך ש- $0 \neq \alpha \in F$ כפל בסקלר שונה מ-0.

3) $R_i = R_i + \alpha R_j$ כאשר $i \neq j$.



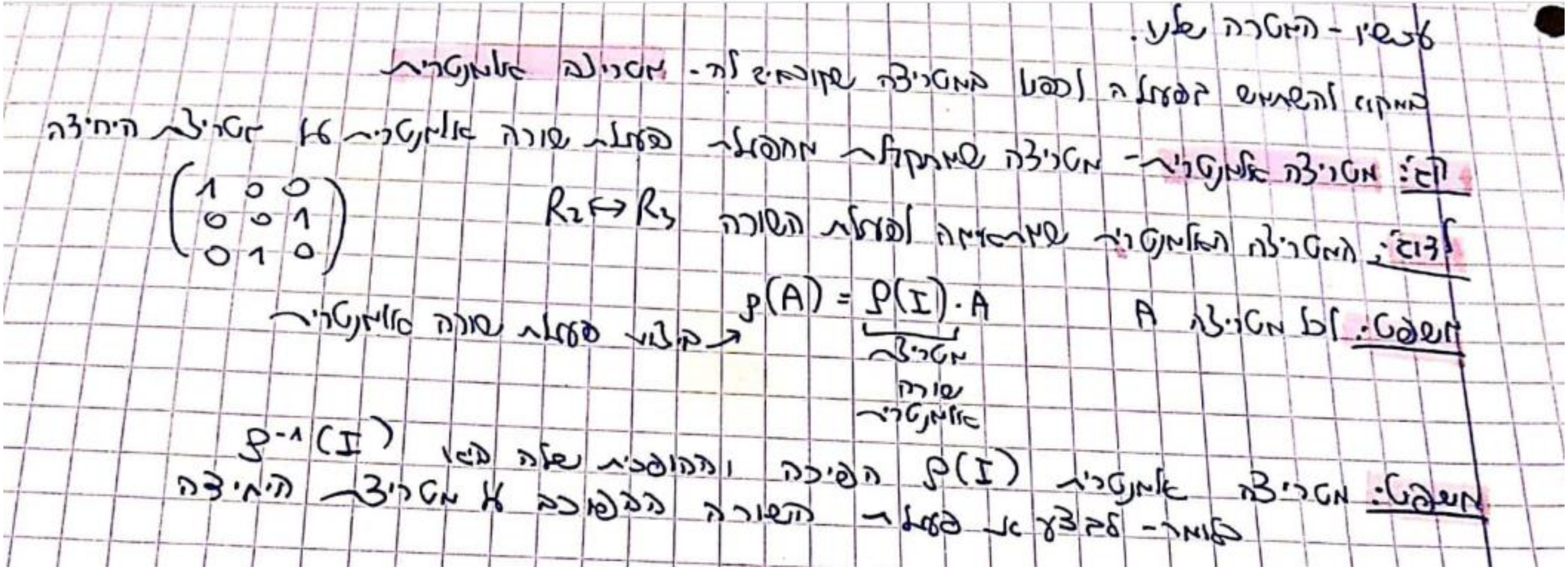
דוג: אם נסמן את הפעולה $R_1=R_1-R_2$ באות ρ לשם נוחות

אזי נקבל -

$$\rho\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1=R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

עכשיו - המטרה שלנו.

במקום להשתמש בפעולה לכפול במטריצה שקוראים לה - מטריצה אלמנטרית



עכשיו - המטרה שלנו.

במקום להשתמש בפעולה לכפול במטריצה שקוראים לה - מטריצה אלמנטרית

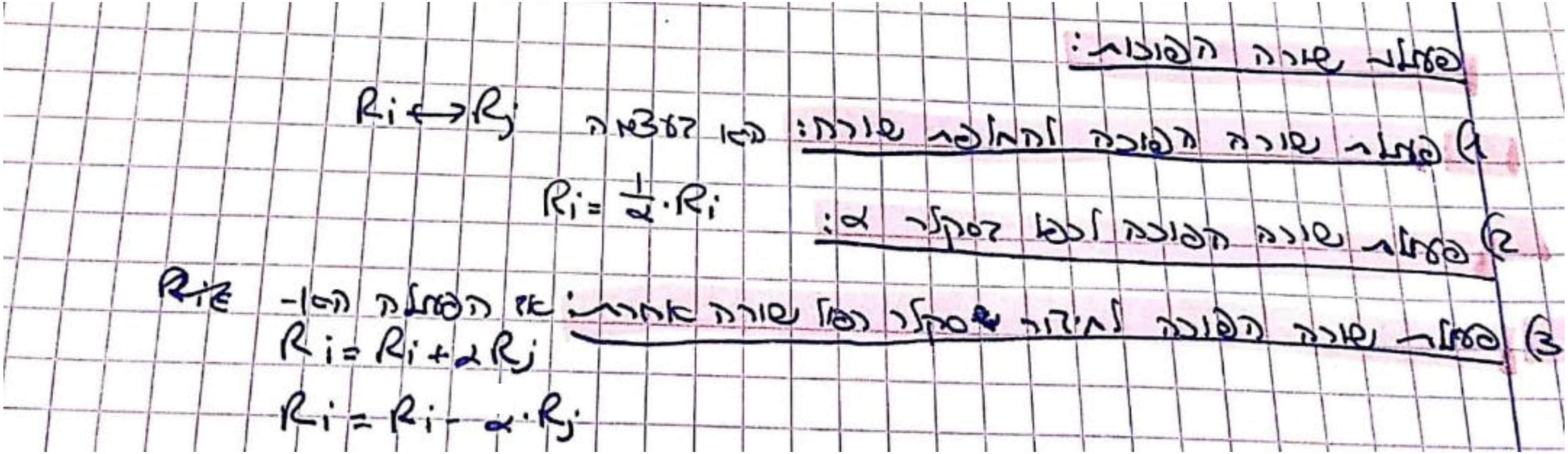
הגד: מטריצה אלמנטרית - מטריצה שמתקבלת מהפעלת פעולת שורה אלמנטרית על מטריצת היחידה

לדוג: המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולת השורה $R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט: לכל מטריצה A
$$\rho(A) = \underbrace{\rho(I)}_{\text{מטריצה שורה אלמנטרית}} \cdot A$$
קיבוע פעולת שורה אלמנטרית ← ρ

משפט: מטריצה אלמנטרית $\rho(I)$ הפיכה וההופכית שלה היא $\rho^{-1}(I)$

כלומר - לבצע את פעולת השורה ההפוכה על מטריצת היחידה



פעולות שורה הפוכות:

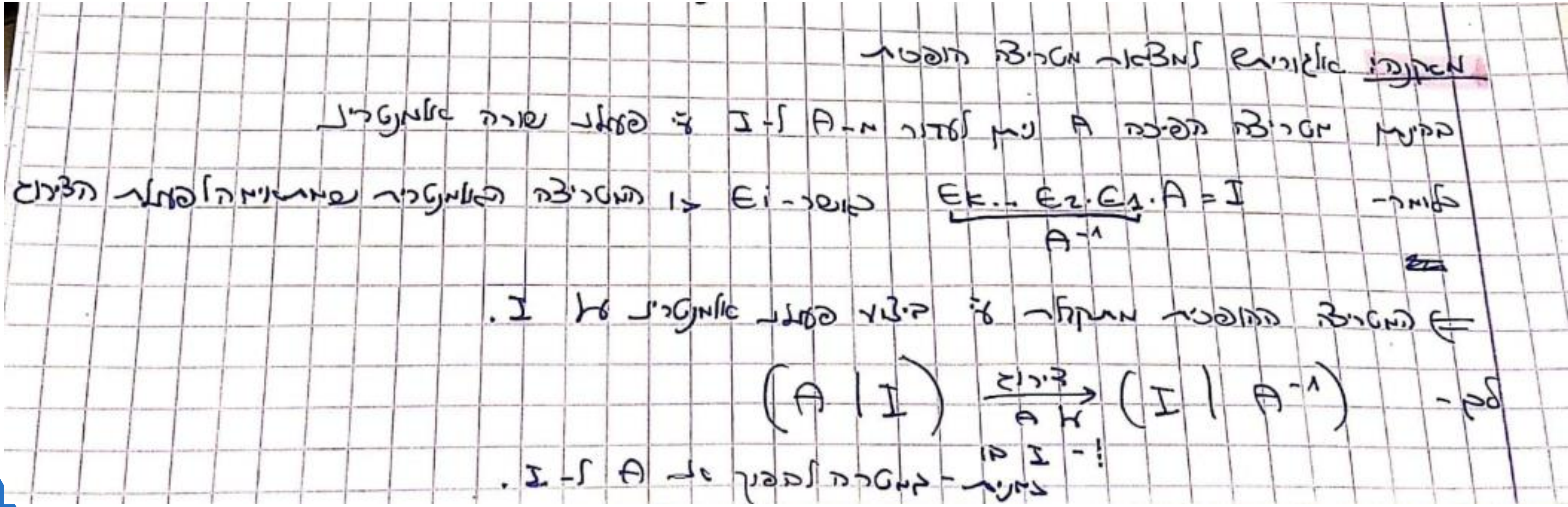
1) פעולת שורה הפוכה להחלפת שורה: כמו לדוגמה $R_i \leftrightarrow R_j$

2) פעולת שורה הפוכה לכפל בסקלר α: $R_i = \frac{1}{\alpha} \cdot R_i$

3) פעולת שורה הפוכה לחיבור סקלר כפול שורה אחרת: אז הפעולה הפו- $R_i \mp$

$R_i = R_i + \alpha R_j$

$R_i = R_i - \alpha \cdot R_j$



מסקנה: אלגוריתם למציאת מטריצה הופכית

בהינתן מטריצה הפיכה A ניתן לעבור מ-A ל-I ע"י פעולות שורה אלמנטריות

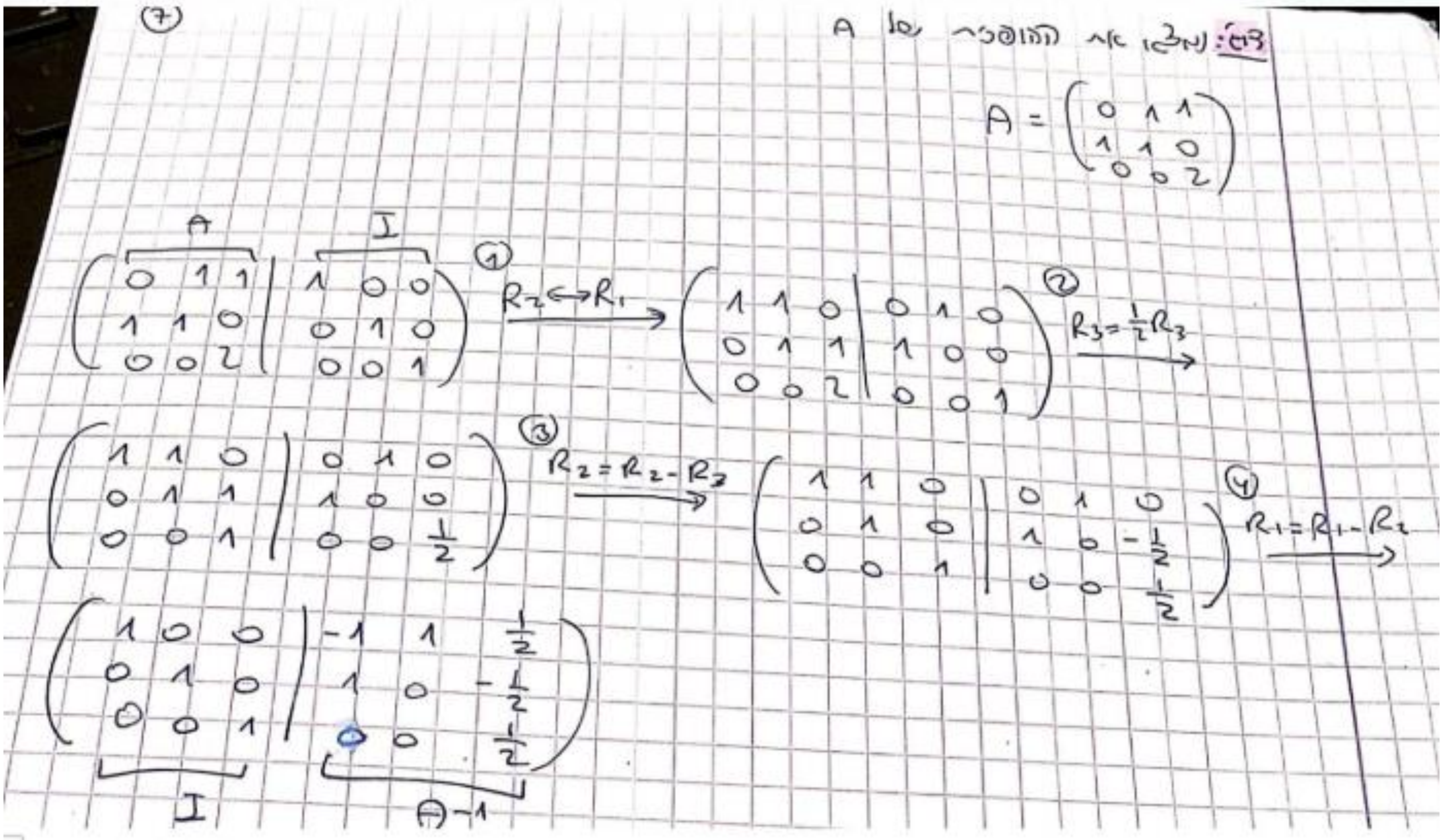
כלומר- $\underbrace{E_k \dots E_2 \cdot E_1}_{A^{-1}} \cdot A = I$ כאשר- E_i זו המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולת הדירוג

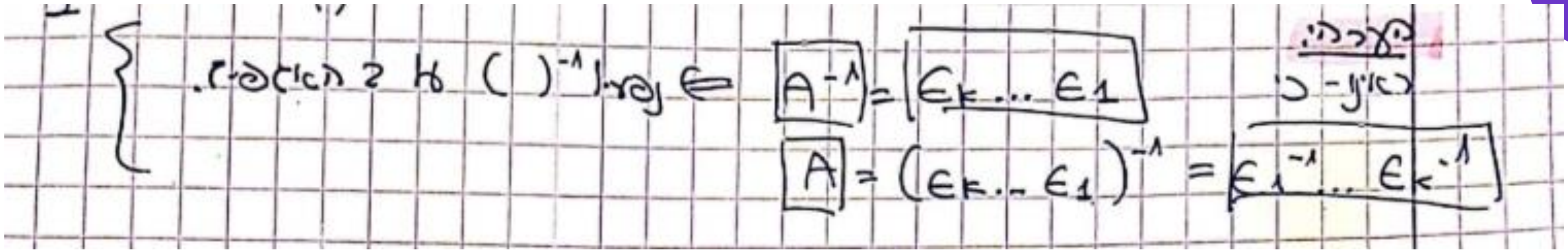
⇐ המטריצה ההופכית מתקבלת ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות על I.

לכן- $\left(A \mid I\right) \xrightarrow[\text{על } A]{\text{דירוג}} \left(I \mid A^{-1}\right)$

גם I -!

במילים - במטרה להפוך את A ל-I.

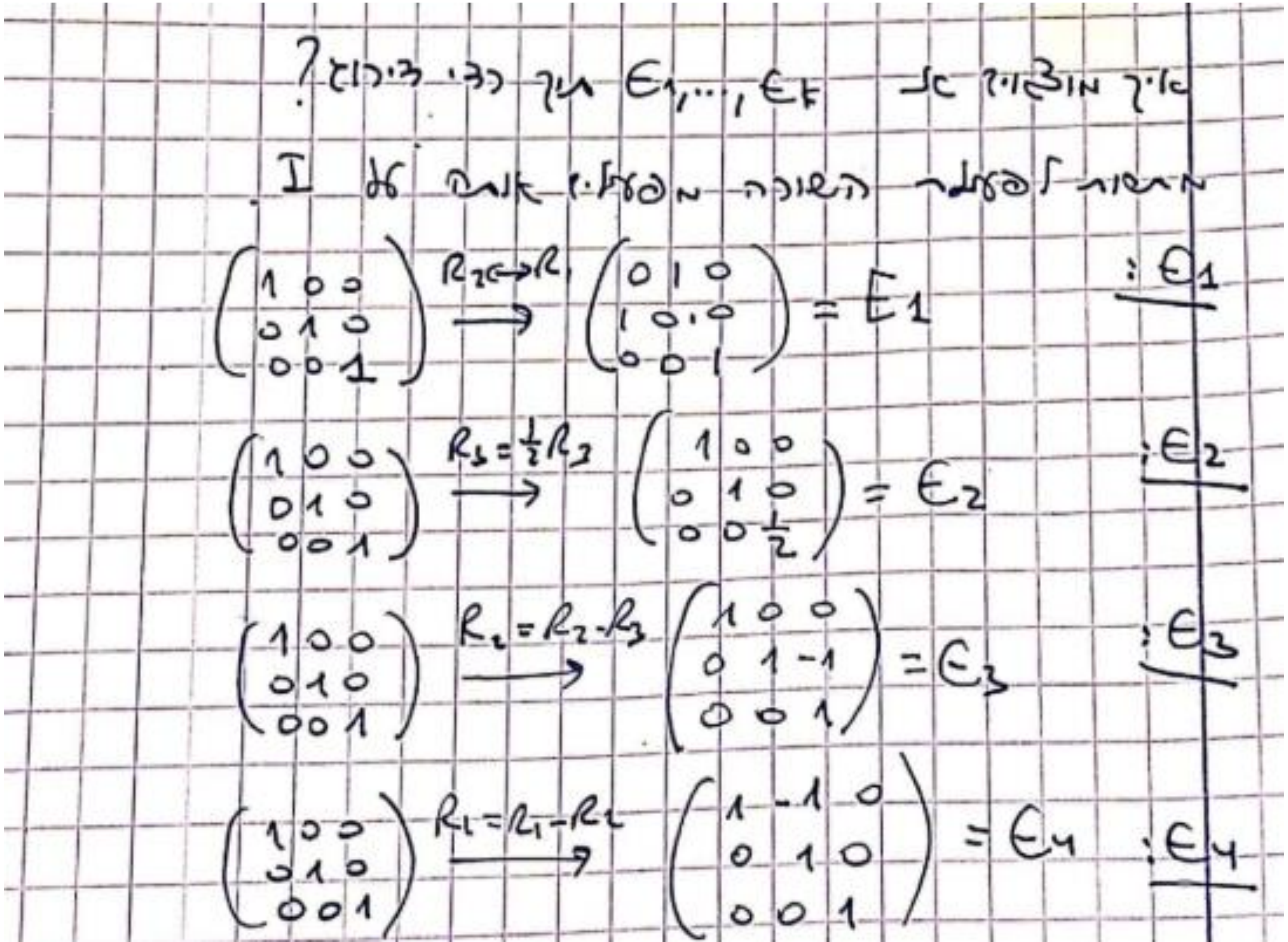




הערה:
כמו-כן

$\boxed{A^{-1}} = \boxed{E_k \cdots E_1}$ ⇐ נפעיל $(\ )^{-1}$ על 2 הצדדים.

$\boxed{A} = (E_k \cdots E_1)^{-1} = \boxed{E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}}$



איך מוצאים את $E_1,\dots,E_k$ תוך כדי דירוג?

מתאים לפעולת השורה מפעילים אותה על I.

E_1:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_1$$

E_2:

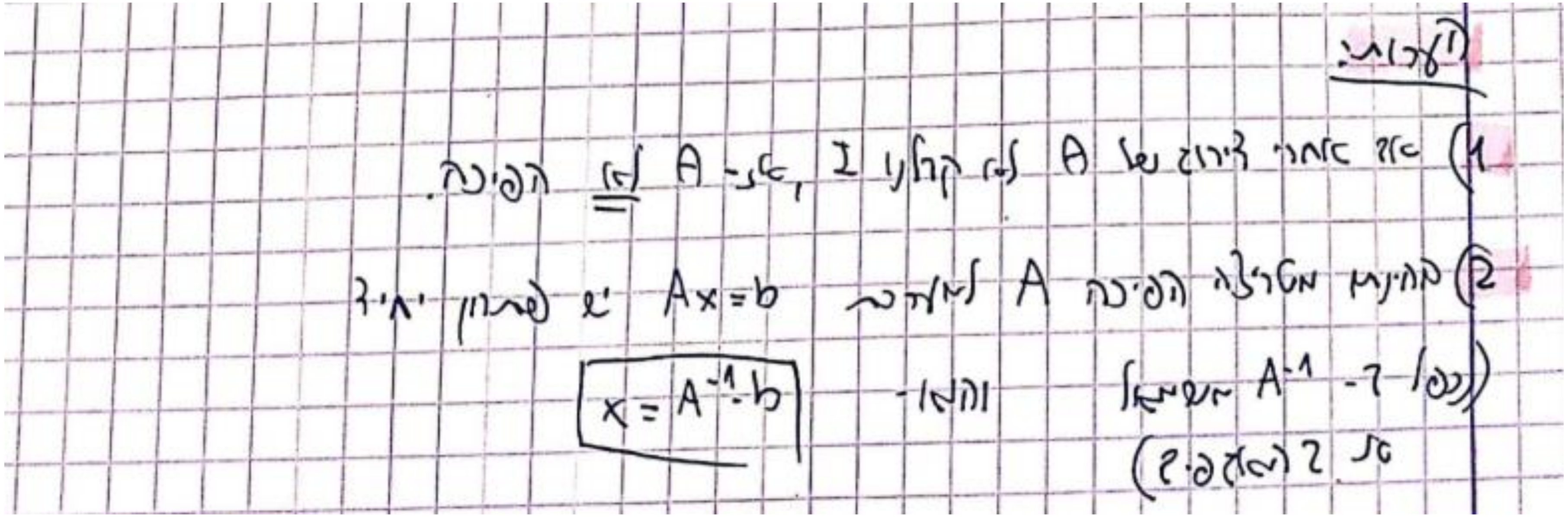
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix} = E_2$$

E_3:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = E_3$$

E_4:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_4$$



הערות:

1) אם אחרי דירוג של A לא קיבלנו I, אז A לא הפיכה.

2) בהינתן מטריצה הפיכה A למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד

(נכפיל ב- A^{-1} משמאל של 2 האגפים) והוא - $\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$

בהצלחה!!!