# 12 משפט Gauss-Bonnet

## 12.1 זהות Binet-Cauchy

### משפט(מקרה 3־מימדי של Binet-Cauchy)

וקטורים $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ מקיימים

$$(a \cdot c)(b \cdot d) = (a \cdot d)(b \cdot c) + (a \times b) \cdot (c \times d)$$

$$\langle a, c\rangle \langle b, d\rangle = \langle a, d\rangle \langle b, c\rangle + \langle a \times b, b \times d\rangle$$

$$\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

### מסקנה

יהיו $a, b$ הווקטורים $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ של משטח $\underline{x}\left(u^1, u^2\right)$.
אזי מתקיימת הנוסחה

$$\left|x_1 \times x_2\right|^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \det\left(g_{ij}\right)$$

### הוכחה

$$\langle x_i, x_i\rangle = \left|x_i\right|^2 = g_{ii}$$

$$\langle x_1, x_2\rangle = g_{12}$$

$$|x_1 \times x_2| = \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{\mathrm{Gram}}$$

# 12.2 אלמנט שטח(area element) של משטח ושל הספירה

## הגדרה

אלמנט שטח של משטח $\Sigma$ הוא

$$\mathrm{d}A_{\Sigma} = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = |x_1 \times x_2|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

כאשר $(g_{ij})$ הם מקדמים של תבנית יסודית ראשונה של $\Sigma$.

## תזכורת

אורך של עקומה הוא $\beta = x \circ \alpha$ $\quad L_p = \int \sqrt{g_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}}\,\mathrm{d}t$

## הגדרה

יהי $\underline{x}(D) \subset \Sigma$ תחום פתוח. השטח שלו הוא

$$\mathrm{area}(\underline{x}(D)) = \iint_D \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

## תזכורת

$p = \underline{x}(u^1, u^2)$. הנורמל בנקודה $p$ הוא $n(u^1, u^2)$
הפונקציה $N$ מרחיבה את $n$ לכל המרחב:

$$n(u^1, u^2) = N_{x(u^1,u^2)} = N_p$$

## משפט

אם עקמומיות Gauss של $\Sigma$ היא שונה מאפס בנקודה $p = \underline{x}(u_0^1, u_0^2)$, אזי העתקה $n(u^1, u^2)$ נותנת פרמטריזציה רגולרית של סביבה פתוחה של נקודה $n(u_0^1, u_0^2) \in S^2$.

### הערה

$$S^2=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

$n\left(u^1,u^2\right)$ הוא ווקטור יחידה, ולכן ניתן לחשוב עליו בעל נקודה ב-$S^2$.

### הוכחת המשפט

הפרמטריזציה מוגדרת על ידי ההעתקה $n\left(u^1,u^2\right)$ כלפי הספירה, כאשר היעקוביאן שלה הוא העתקה ווינגארטון:

$$n_j=L_j^i x_i$$

אם $K\neq 0$ אזי $\det\left(L_j^i\right)\neq 0$, לכן $n\left(u^1,u^2\right)$ מגדיר פרמטריזציה רגולרית, מפני שווקטורים $n_1,n_2$ בת"ל.

## משפט

נתבונן בפרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$ של סביבה על $S^2$. אזי אלמנט שטח $\mathrm{d}A_{S^2}$ מתבטא ע"י

$$(*)\qquad \mathrm{d}A_{S^2}=\sqrt{\det\left(\tilde{g}_{ij}\right)}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2=\left|n_1\times n_2\right|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

כאשר $\begin{matrix}\alpha=1,2\\ \beta=1,2\end{matrix}$ $\left(\tilde{g}_{ij}\right)$ הם מקדמים של ת.י.ר. של פרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$ של הספירה,
ואילו $n_j=\frac{\partial n\left(u^1,u^2\right)}{\partial u^j}$, $j=1,2$ .

### הוכחה

הנוסחה $(*)$ היא הנוסחה הרגילה לאלמנט שטח ביחס לפרמטריזציה, עם ההבדל שמשתמשים בפרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$ במקום סימון רגיל $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$.

### הערה

הבדל בין $\mathrm{d}A_\Sigma$ ו-$\mathrm{d}A_{S^2}$

$$M=S^2$$

# 12.3 הוכחת משפט Gauss-Bonnet

- משטח $\Sigma$.
  - $\underline{x}\left(u^1,u^2\right)$ פרמטריזציה של $\Sigma$

- $(g_{ij})$ ת.י.ר. של $\Sigma$ $\begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$
- $n\left(u^1,u^2\right)$ נורמל של $\Sigma$.

• $S^2$ ספירת יחיסה

- $n\left(u^1,u^2\right)$ פרמטריזציה של $S^2$
- $(\tilde{g}_{\alpha,\beta})$ ת.י.ר. של $S^2$ $\begin{matrix} \alpha=1,2 \\ \beta=1,2 \end{matrix}$
- ביחס לפרמטריזציה $n$ על $S^2$,

$$\tilde{\Gamma}^{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}_{\alpha\gamma:\beta} - \tilde{g}_{\alpha\beta:\eta} + \tilde{g}_{\beta\gamma:\alpha}\right)\tilde{g}^{\gamma\eta}$$

$$\boxed{K = \tilde{\Gamma}^{x}_{kx:*}}$$

$$K \equiv 1$$

## למה

מתקיים

$$\det\left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right) = K\left(u^1,u^2\right)^2 \det\left(g_{ij}\right)$$

כאשר $K = K\left(u^1,u^2\right)$ היא עקמומיות Gauss של משטח $\Sigma$.

## הוכחה

תהי $L = \left(L^i_j\right)$ מטריצה של העתקת Weingarten ביחס לבסיס $\left(\underline{x}_1,\underline{x}_2\right)$. לפי הגדרה, $K = \det L$. מקדמים $\left(L^i_j\right)$ מוגדרים ע"י

$$(**) \qquad n_\alpha = L^i_\alpha \underline{x}_i = \underline{x}_i L^i_\alpha$$

נתבונן במטריצות $3\times 2$

$$A = \begin{bmatrix}\underline{x}_1 & \underline{x}_2\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}n_1 & n_2\end{bmatrix}$$

אזי לפי $(**)$,

$$(***) \qquad B = AL$$

נתבונן במטריצת Gram:

$$\mathrm{Gram}\left(n_1,n_2\right)=B^tB=\left(AL\right)^tAL=L^tA^tAL=L^t\mathrm{Gram}\left(x_1,x_2\right)L$$

$$(****)\qquad \mathrm{Gram}\left(n_1,n_2\right)=L^t\mathrm{Gram}\left(x_1,x_2\right)L$$

נישם דטרמיננטה לנוסחה $(****)$:

$$\det\left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right)=\det\left(\mathrm{Gram}\left(n_1,n_2\right)\right)=\underbrace{\det\left(L^t\right)}_{=K}\det\left(\mathrm{Gram}\left(x_1,x_2\right)\right)\underbrace{\det\left(L\right)}_{=K}=K^2\det\left(g_{ij}\right)$$

**לפי Binet-Cauchy:**

$$\left|n_1\times n_2\right|=\left|K\right|\left|x_1\times x_2\right|$$

$$\det\left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right)=K\left(u^1,u^2\right)^2\det\left(g_{ij}\right)$$

כאשר $K=K\left(u^1,u^2\right)$ היא עקמומיות Gauss של משטח $\Sigma$.

## משפט(מקרה פרטי של Gauss-Bonnet)

יהי $\Sigma$ משטח כמור סגור ב$\mathbb{R}^3$ בעקמומיות Gauss $K$ חיובית(כמו אליפסויד).
אזי אינטגרל של עקמומיות $K$ על $\Sigma$ מקיים

$$\iint_{\Sigma}K\mathrm{d}A_{\Sigma}=4\pi$$

### הוכחה

הביטוי $K\,\mathrm{d}A_{\Sigma}$ בקואורדינטות $\left(u_1,u_2\right)$ מתבטא ע"י

$$K\left(u^1,u^2\right)\,\mathrm{d}A_{\Sigma}=K\left(u^1,u^2\right)\underbrace{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}}_{=\sqrt{\det\tilde{g}_{\alpha\beta}}}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

לכן

$$K\,\mathrm{d}A_{\Sigma}=\sqrt{\det\tilde{g}_{\alpha\beta}}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2=\mathrm{d}A_{S^2}$$

(ביחס לפרמטריזציה $n\left(u^1,u^2\right)$)
לכן

$$\int_{\Sigma}K\,\mathrm{d}A_{\Sigma}=\int_{S^2}\mathrm{d}A_{S^2}=\mathrm{area}\left(S^2\right)=4\pi$$

## 12.4 דואליות באלגברה לינארית

$V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

**דוגמאות:**

- $\mathbb{R}^n$
- מישור משיק $T_pM$ של משטח $M$ בנקודה $p \in M$.

### הגדרה

תבנית לינארית(או 1־תבנית) על $V$ היא העתקה לינארית

---

- נסמן ב$\mathrm{d}x$ את 1־תבנית $\mathrm{d}x\left(v\right) = v^1$
- נסמן ב$\mathrm{d}y$ את 1־תבנית $\mathrm{d}y\left(v\right) = v^2$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ תבניות לינאריות

### הגדרה

$\mathrm{d}x^2, \mathrm{d}y^2$ תבניות ריבועיות.

$$\mathrm{d}x^2\left(v\right) = \left(v^1\right)^2$$

$$\mathrm{d}y^2\left(v\right) = \left(v^2\right)^2$$

נשים לב: יש כאן גם אינדקס עליון של אלמנט בווקטור, וגם אינדקס עליון של חזקה.
שריבוע של 1־תבנית נקרא תבנית ריבועית בדרגה $\mathrm{rank} = 1$.

### הגדרה

מרחב דואלי $V^*$ של $V$ הוא מרחב המכיל את כל 1־תבניות על $V$:

$$V^* = \left\{\phi | \phi \text{ is 1-form on } V\right\}$$

### הגדרה

העתקת evaluation היא זיווג בין $V$ ל-$V^*$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V^* \to \mathbb{R}$$

לכל $x \in V$, לכל $y \in V^*$

$$\langle x, y\rangle = y\left(x\right) \in \mathbb{R}$$

### הגדרה

נניח שיש בסיס $(x_i) = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ למרחב $V$. אזי גם למרחב $V^*$ יש בסיס יחיד:

$$(y_j) = (y_1, y_2, \ldots y_n)$$

המקיים

$$\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & j \neq j \end{cases}$$

### דוגמה

$\mathbb{R}^2$, בסיס $(e_1, e_2)$, $V = \mathbb{R}^2$. איזה בסיס יש ל-$V^*$?
ל-$V^*$ יש בסיס $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

## 12.5 דואליות באינפי

$E$ מרחב אוקלידי ממימד $n$. $p \in E$ נקודה קבועה.

### הגדרה

יהי

$$\mathbb{D}_p = \{f | f \in C^\infty\}$$

מרחב של כל הפונקציות הגזירות אינסוף פעמים בסביבה של $p$.

## משפט

נגזרת חלקית $\frac{\partial}{\partial u^i}$ בנקודה $p$ היא 1־תבנית

$$\frac{\partial}{\partial u^i} : \mathbb{D}_p \to \mathbb{R}$$

על מרחב $\mathbb{D}_p$ המקיים את כלל Leibniz

$$\left.\frac{\partial (fg)}{\partial u^i}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial u^i}\right|_p g(p) + f(p) \left.\frac{\partial g}{\partial u^i}\right|_p$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} (fg) = \frac{\partial}{\partial u^i} (f) \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} (g)$$

(הכל בנקודה $p$)

## הגדרה

דריבציה(Derivation) על $\mathbb{D}$ היא 1־תבנית לינארית $X$

$$X : \mathbb{D}_p \to \mathbb{R}$$

על מרחב $\mathbb{D}_p$ המקיימת את כלל ליבניץ

$$\boxed{X (fg) = X (f)\, g (p) + f (p)\, X (g)}$$

## משפט

<u>מרחב של דריבציות</u> ב$p$ הוא מרחב וקטורי <u>במימד $n$</u> הנקרא מרחב משיק $T_p = T_pE$ בנקודה $p \in E$.