משפט קיילי

לכל חבורה סופית G קיים n טבעי כך שG איזומורפית לת"ח של S_n.
במילים אחרות, קיים שיכון(=מונומורפיזם=העתקה חח"ע לתוך) מG לתוך S_n

דוגמה

$$G=\mathbb{Z}_4$$

נראה ש$\mathbb{Z}_4$ איזומורפית לת"ח של S_4. נכתוב טבלת כפל של $\mathbb{Z}_4$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

כל שורה בטבלת הכפל היא תמורה של האותיות $\{0,1,2,3\}$ / נעתיק אבר $i\in\mathbb{Z}_4$ לתמורה המתאימה לשורה שלו:

$$\varphi(0)=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\varphi(1)=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\end{pmatrix}=(0,1,2,3)$$

$$\varphi(2)=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}=(0,2)(1,3)=\varphi(1)^2$$

$$\varphi(3)=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&0&1&2\end{pmatrix}=(0,3,2,1)=(0,1,2,3)^3=\varphi(1)^3$$

הוכחת משפט קיילי

תהא G חבורה סופית. נסמן $n=|G|$. נשכן את G ב$S(G)$(תזכורת - $S(X)$ היא חבורת התמורות על איברי קבוצה X) כזכור $S(G)\cong S_{|G|}=S_n$. נעתיק איבר $g\in G$ לעמודה שלו בטבלת הכפל. כלומר, נסדר אברי G בסדר כלשהו $x_1,x_2,...x_n$ ונגדיר

$$\forall g\in G\quad \varphi(g)=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\gx_1&gx_2&gx_3&\cdots&gx_n\end{pmatrix}$$

(א) ראשית צריך להוכיח $\varphi(g)\in S(G)$. כלומר $\varphi(g)$ העתקה חח"ע ועל מG לG. מכיוון שG סופית מספיק להוכיח $\varphi(g)$ חח"ע מG לG. מכיוון שG סופית. כלומר, צ"ל אין $x_1\neq x_2$ בG כך ש$\varphi(g)(x_1)=\varphi(g)(x_2)$. אכן,

$$\varphi(g)(x_1)=\varphi(g)(x_2)$$

$$\Leftrightarrow gx_1 = gx_2$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

הוכחנו $\varphi(g) \in S(G)$.

(ב) כעת נוכיח $\varphi : G \to S(G)$ חח"ע. ז"א צ"ל: אין $g_1 \neq g_2$ בG כך ש$\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. אכן, אם $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ אז לכל $x \in G$ $\varphi(g_1)(x) = \varphi(g_2)(x) \Leftrightarrow g_1x = g_2x \quad \forall x \in G \Leftrightarrow g_1xx^{-1} = g_2xx^{-1} \quad \forall x \in G \Leftrightarrow g_1 = g_2$. הוכחנו $\varphi : G \to S(G)$ חח"ע.

(ג) נותר להוכיח: $\varphi : G \to S(G)$ הומ'. ז.א. $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) \quad \forall g, h \in G$. אכן

$$\forall x \in G \quad \varphi(gh)(x) = \varphi(g)\varphi(h)(x)$$

אבל

$$\varphi(gh)(x) = (gh)x = g(hx) = g(\varphi(h)x) = \varphi(g)\varphi(h)(x)$$

<u>מסקנה</u>: $\varphi : G \to S(G)$ היא הומומורפיזם, ולכן תמונתה ת"ח של $S(G)$ היא חח"ע ולכן היא איז' לתמונתה■

עובדה

S_n ניתנת לשיכון ב$GL_n(\mathbb{F})$. ז.א. קיים מונומורפיזם $\varphi : S_n \to GL_n(\mathbb{F})$.

הוכחה

לכל $\pi \in S_n$, $\varphi(\pi) = A_\pi$ כאשר $(A_\pi)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = \pi(j) \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

דוגמה

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)$$

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עובדות

$$\det A_\pi = \operatorname{sign}(\pi) \qquad (i)$$

$$\operatorname{tr} A_\pi = |\operatorname{Fix}(\pi)| = |\{i : \pi(i) = i\}| \qquad (ii)$$

טענה 1

$\varphi : S_n \to GL_n(\mathbb{F})$ המוגדרת ע"י $\varphi(\pi) = A_\pi$ היא מונומורפיזם.

הגדרה

<u>מטריצות תמורה</u> הן מטריצות שאבריהן $\in \{0,1\}$ ובכל שורה 1 יחיד ובכל עמודה 1 יחיד.

עובדה

$A \in GL_n(\mathbb{F})$ היא מטריצת תמורה אמ"ם קיים $\pi \in S_n$ כך ש$A = A_\pi$

מסקנה ממשפט קיילי וטענה 1

לכל חבורה סופית G קיים מונומורפיזם ל$GL_n(\mathbb{C})$ כאשר $n = |G|$. המונומורפיזם נקרא <u>ההצגה הרגולרית</u> של G.

הגדרה

הצגה של חבורה G, היא הומומורפיזם מG ל$GL_n(\mathbb{F})$(עבור איזשהו n). n נקרא ממד ההצגה.