הערה לגבי המבחן הסופי:
המבנה יהיה דומה לזה של הבוחן, אבל תתבקשו לסרוק ולהעלות את הדרך המלאה של הפתרון, וגם היא תיבדק.
הפתרון יהיה צריך להיות מלא, עם כל החישובים, כמו במבחן רגיל.

מרחבי מטריצה

תזכורת: תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ יש 3 מרחבים:
1. $N(A)$- מרחב האפס, שווה ל

$$\{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}$$

שזה בעצם הפתרונות של המערכת ההומוגנית שA מייצגת.
2. $R(A)$- מרחב השורות

$$span\{R_1(A), ..., R_m(A)\}$$

3. $C(A)$- מרחב העמודות

$$span\{C_1(A), ..., C_n(A)\}$$

איך מוצאים בסיסים לכל אחד מהמרחבים?
אלגוריתם:
תהי A מטריצה. נדרג אותה לצורה קנונית.
1. בשביל מרחב האפס- נציב משתנים $t, s, ..$ במשתנים החופשיים, נמצא את הפתרון הכללי, ואז "נוציא" את המשתנים והוקטורים שנשארים הם בסיס למרחב האפס.
3. נישאר עם העמודות של A, שבאותו מקום אחרי הדירוג יש איבר מוביל. (למשל, אם לאחר הדירוג יש איברים מובילים רק בעמודות הראשונה והשלישית של המטריצה המדורגת, אז בסיס למרחב העמודות יהיה העמודות הראשונה והשלישית של A)
דוגמא:
2. ניקח את השורות בצורה המדורגת שאינן שורות אפסים.
דוגמאות:
1. מצאו בסיסים לשלושת מרחבי המטריצה של המטריצה הבאה:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C(A)$- בסיס למרחב העמודות יהיה העמודה הראשונה והשניה של A

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$R(A)$- בסיס למרחב השורות יהיה השורות הראשונה והשניה של המטריצה המדורגת

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$N(A)$-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח שהמשתנים שלנו הם x, y, z, w. נציב $z = t, w = s$.

$$x = t + 2s$$

$$y = -2t - 3s$$

$$\begin{pmatrix} t+2s \\ -2t-3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב האפס הוא

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.מצאו בסיסים לשלושת מרחבי המטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -17 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -17 & 6 \\ 0 & 0 & 19 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 0.5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -8.5 & 3 \\ 0 & 0 & 19 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{19}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -8.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{19} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & -8.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{19} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 8.5R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

$C(A)$- שלוש העמודות הראשונות של A.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$R(A)$- כל השורות של המטריצה המדורגת

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{19} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{23}{19} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

$N(A)$-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

נקרא למשתנים שלנו x, y, z, w.
w הוא משתנה חופשי. נסמן $w = t$. אז

$$x = \frac{3}{19}t$$

$$y = -\frac{23}{19}t$$

$$z=\frac{4}{19}t$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{19}t \\ -\frac{23}{19}t \\ \frac{4}{19}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{3}{19} \\ -\frac{23}{19} \\ \frac{4}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{3}{19} \\ -\frac{23}{19} \\ \frac{4}{19} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

הערה: מרחב העמודות של A שווה בדיוק לקבוצה של כל הוקטורים v כך שיש פתרון למערכת

$$Ax=v$$

הסבר: $\Longrightarrow$ נניח שיש פתרון למערכת. כלומר, יש איזשהו וקטור $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ כך ש= $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ v.

כשלמדנו להכפיל מטריצה בוקטור, ראינו ש

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1c_1(A)+x_2c_2(A)+...+x_nc_n(A)$$

אז אם

$$x_1c_1(A)+x_2c_2(A)+...+x_nc_n(A)=v$$

זה אומר ש$v\in span\{c_1(A),...,c_n(A)\}=C(A)$

$\Longleftarrow$ נניח ש$v\in C(A)=span\{c_1(A),...,c_n(A)\}$. כלומר, קיימים סקלרים $x_1,..,x_n$ כך ש

$$v=x_1c_1(A)+...+x_nc_n(A)=A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כלומר, מצאנו וקטור שפותר את המערכת

$$Ax = v$$

משפט: לכל מטריצה A,

$$\dim R(A) = \dim C(A)$$

הגדרה: הדרגה של מטריצה A, מסמנים $rank(A)$ מוגדרת להיות המימד של מרחב העמודות/שורות של A.

למשל בדוגמאות שעשינו:
בדוגמא הראשונה- $rank(A) = 2$
בדוגמא השניה- $rank(A) = 3$
משפט (משפט הדרגה): תהי A מטריצה מגודל $m \times n$, אז מתקיים:

$$rank(A) + \dim N(A) = n$$

במילים: דרגת המטריצה+ מימד מרחב האפס= מספר העמודות.

הסבר כללי: הדרגה=מימד של מרחב העמודות. המימד של מרחב העמודות= מספר הוקטורים בבסיס= מספר העמודות בצורה המדורגת הקנונית שיש בהם איבר מוביל.

המימד של מרחב האפס= מספר המשתנים שאנחנו מציבים= העמודות שיש בהם משתנה חופשי, כלומר, שאין בהן איבר מוביל.

אז ברור שהסכום שווה למספר העמודות.

ליכסון

בנושא הזה אנחנו מדברים רק על מטריצות ריבועיות.

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

מספר $\lambda \in \mathbb{R}$ נקרא **ערך עצמי** של A, אם קיים איזשהו וקטור $v \neq 0$, כך ש

$$Av = \lambda v$$

לדוגמא: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

אז 1 הוא ע"ע של A.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

אז 2 הוא ע"ע של A.
הגדרה: תהי A מטריצה ריבועית וλ ע"ע של A, אז וקטור $v \neq 0$ שמקיים $Av = \lambda v$ נקרא **וקטור עצמי** של A שמתאים לע"ע λ.
למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ שמתאים לערך עצמי 1.
הערה: לע"ע יש וקטורים עצמיים רבים. למעשה האוסף של כל הוקטורים העצמיים שמתאימים לλ, ביחד עם וקטור ה0, הוא מרחב וקטורי. נסמן אותו $V_\lambda(A)$.
הוכחה:
וקטור ה0 נמצא- לפי ההגדרה.
נראה סגירות לחיבור וכפל בסקלר. נניח ש$v, u \in V_\lambda(A)$. כלומר,

$$Av = \lambda v$$

$$Au = \lambda u$$

רוצים להראות ש$v + \alpha u \in V_\lambda(A)$

$$A(v + \alpha u) = Av + \alpha Au = \lambda v + \alpha\lambda u = \lambda(v + \alpha u)$$

בהינתן מטריצה, איך מוצאים את הערכים העצמיים שלה?
תהי A מטריצה ריבועית. λ הוא ערך עצמי (ע"ע) אם ורק אם, קיים איזשהו $v \neq 0$ כך ש

$$Av = \lambda v$$

שקול:

$$Av - \lambda v = 0$$

שקול

$$(A - \lambda I)v = 0$$

אנחנו רוצים שלמטריצה $a - \lambda I$ מרחב ה0 לא יהיה רק וקטור ה0.
כלומר, רוצים שיהיה פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית. זה אומר שבדירוג יש משתנה חופשי.
בשביל זה צריך להיות משתנה חופשי כשמדרגים את $A - \lambda I$.
$A - \lambda I$ היא מטריצה ריבועית. אם בדירוג שלה יש משתנה חופשי זה אומר שהיא לא הפיכה.
לסיכום: λ הוא ע"ע של A אמ"ם המטריצה $A - \lambda I$ לא הפיכה.
תזכורת: מטריצה היא לא הפיכה אמ"ם הדטרמיננטה שלה שווה ל0.
לכן: λ הוא ע"ע של A אמ"ם $|A - \lambda I| = 0$.
לדוגמא: מצאו את הערכים העצמיים של $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון: אנחנו מחפשים את כל המספרים λ שיקיימו

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = (3-\lambda)(-\lambda) - 2\cdot(-1) = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

יש שתי פתרונות $\lambda = 1, \lambda = 2$.
כלומר, למטריצה יש שני ערכים עצמיים: $1, 2$.
הגדרה: תהי A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$. **הפולינום האופייני** של A מוגדר להיות

$$|xI - A|$$

מקבלים פולינום ממעלה n במשתנה x.
מסמנים אותו ב$p_A(x)$
למשל, מה הפולינום האופייני של $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

$$\left|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = x^2 - 3x + 2$$

דוגמא נוספת: חשבו את הפולינום האופייני של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix}\right| = (x-1)(x-4) - (-2)(-3) =$$

$$x^2 - 5x + 4 - 6 = x^2 - 5x - 2$$

מסקנה: הע"ע של A שווים לשורשים של הפולינום האופייני של A.
לכן, מספר הערכים קטן שווה מגודל המטריצה (כי לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים), יכול להיות קטן ממש, יכול להיות שאין בכלל ערכים עצמיים.
לדוגמא: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A = \left|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\right| = x^2 + 1$$

לפולינום האופייני של A אין שורשים ממשיים.
טענה: תהי A מטריצה משולשית. אזי הע"ע של A הם איברי האלכסון.

הוכחה: נחשב את הפולינום האופייני.

$$|xI - A|$$

המטריצה A, שלכל האיברים שלא באלכסון עושים מינוס, ובאלכסון עושים x פחות האיבר שנמצא שם.

בגלל שA מטריצה משולשית, אז $xI - A$ גם מטריצה משולשית. דטרמיננטה של מטריצה משולשית זה מכפלת איברי האלכסון.

אז אם איברי האלכסון של A היא $a_1, .., a_n$. האיברים באלכסון של $xI - A$ הם $x - a_1, .., x - a_n$.

$$p_A(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

והשורשים שלו הם בדיוק $a_1, .., a_n$.