

Extensive Form Game

עד היום התעסקנו במשחקים סימולטניים, שבהם כל שחקן קבע את האסטרטגיה שלו לפני שידע מה האחרים עושים. כעת נרצה למצוא שיווי משקל במשחקים סדרתיים. נדבר בשיעור הזה על Extensive Form Games עם אינפורמציה מלאה - כל שחקן יודע מה השחקנים האחרים עשו לפניו.

ויתור על אלטרנטיבות - Burn the Boats

אם יש לי אלטרנטיבות A, B , ואני מוותר על B , אז לא נותרה לי ברירה אלא לבחור ב- A .

• פרדוקס ההתחייבות paradox of commitment

לפעמים על ידי ויתור על אפשרויות אנו יכולים להבטיח שהיריב יעשה פעולה שיותר רצויה לנו.

מיוחס לקורטז, שנחת בחופי מקסיקו, שם היו האצטקים. אחרי שהוא הוריד את הכוח שלו לחוף הוא שרף את כל הספינות שלו. למה הוא עשה דבר כזה? הוא ידע שהאצטקים משוגעים לגמרי, ושהחייילים שלו יודעים את זה. החייילים של קורטז יכלו להילחם בכל הכוח או להיות זהירים ולברוח אם צריך. אם לא שורפים את הספינות אז החייילים יכולים לברוח, שזה עדיף להם (כי הם ישארו בחיים) אבל פחות לקורטז (שלא ינצח). אבל אם קורטז שורף את הספינות לחייילים אין ברירה אלא להילחם חזק - כי אחרת הם ימותו (וגם הוא) כי אין להם ספינות לברוח.

מימד הזמן

מימד הזמן הוא מרכיב משמעותי - Burn the Boats משמעותי רק אם הוא מתבצע לפני הפעולה של השחקן השני. תצורת Normal Form Game לא נותנת שום אינפורמציה על הזמן - תצורת Extensive Form Game נותנת לנו את ציר הזמן. נרצה גם להפריד בין perfect information ל-imperfect information.

Perfect Information Extensive Form Game

משחק סופי עם מידע מלא (extensive form) מוגדר ע"י tuple

$$(N; A; H; Z; \chi; \rho; \sigma; u)$$

כאשר:

השחקנים	N
הפעולות ששחקנים יכולים לבצע	A
choice nodes - הצמתים בהם מתבצעות פעולות	H
action function - פונקציה $\chi : H \rightarrow 2^A$ שמגדירה איזה פעולות אפשריות לשחקן בכל choice node	χ
player function - פונקציה $\rho : H \rightarrow N$ שמגדירה איזה שחקן מבצע את הבחירה בכל choice node	ρ
terminal nodes - צמתים בהם המשחק מסתיים (כבר אי אפשר לבצע פעולות)	Z
utility function - פונקציה $u = (u_1, \dots, u_n) : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ שמגדירה לכל terminal node את התמורות שכל השחקנים מקבלים אם המשחק מסתיים בו	u

σ - successor function - פונקציה $\sigma : H \times A \rightarrow H \cup Z$ שמגדירה לכל choice node איזה פעולה תוביל לאיזה צומת. זה חייב להסתיים בעץ - כלומר לכל $h_1, h_2 \in H$ ו $a_1, a_2 \in A$ צריך להתקיים

$$\sigma(h_1, a_1) = \sigma(h_2, a_2) \iff h_1 = a_1 \wedge h_2 = a_2$$

אסטרטגיות טהורות

אסטרטגיה של שחקן צריכה להגדיר מה הפעולות שהשחקן יבצע בכל צומת בחירה שלו. גם אם הוא לא יגיע לצומת הזה (כי בחירות קודמות באותה אסטרטגיה מובילות לצמתים אחרים), אם זה צומת בחירה שלו זה צריך להיות חלק מהאסטרטגיה.

שיווי משקל נאש

על בסיס ההגדרות החדשות, ניתן להגדיר מחדש:

- אסטרטגיה מעורבת - מתן הסתברות לכל אסטרטגיה בסט האסטרטגיות הטהורות
- Best response - אסטרטגיה שנותנת את התמורה המקסימלית עבור אסטרטגיה מסוימת של השחקנים האחרים
- שיווי משקל נאש - נגדיר מייד

המרת המשחק ל Normal Form

ניתן להמיר משחק Extensive Form למשחק Normal Form - כל שחקן "מכריז מראש" על האסטרטגיה שלו, שמורכבת ממספר בחירות.

Extensive Form Game - יתרונות וחסרונות

- יתרונות: מאפשר לייצג משחקים עם ציר זמן
- מייצג משחקים בצורה קומפקטית:
- צריך רק את הצמתים בעץ שאפשר להגיע אליהם
- מונע חזרה של מצבים
- חסרונות: אי אפשר לייצג איתו את כל המשחקים

שיווי משקל נאש ב Extensive Form Games

משפט: לכל משחק extensive form עם מידע מושלם יש שיווי משקל נאש באסטרטגיות טהורות

זה נובע מכך שהמשחק סדרתי.

נשים ♥ המשפט נכון רק למשחק perfect information extensive form game!

אין טעם להשתמש באסטרטגיות מעורבות, כי כל שחקן יודע מה הקודם כבר עשה.

Subgame Perfection

מכיוון שיש לנו ציר זמן, ניתן להגדיר subgame - תת משחק שמתחיל מצומת בחירה אחר. הגדרה - s הוא subgame perfect equilibrium של G אם ורק אם לכל תת משחק G' של G , הנגזרת של s ל' G' היא שיווי משקל נאש של G' .

Backward Induction

הדרך לחישוב subgame perfect equilibrium היא ללכת מהסוף להתחלה - נתלך בכל לתתי המשחקים בהם יש צומת פעולה אחד, ונניח שהוא יבחר את הפעולה שנותנת לו את התועלת הכי טובה. זהו שיווי המשקל של תת המשחק (כפי אין לאותו שחקן אינטרס לבחור משהו אחר) - ולכן אפשר לכנס את תת העץ הזה לתועלת הזו, ובשלב הבאים יהיו תתי-משחקים חדשים בהם יש רק צומת פעולה אחד.