פתרון תרגיל 8

27 בינואר 2020

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:
   (א) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.
   (ב) $9y'' + 6y' + y = e^{2x}$.
   (ג) $y'' - 8y' + 7y = 0$
   (ד) $y'' - 2y' + 10y = 0$
   (ה) $y'' + 10y = 2x$
   (ו) $4y'' + 4y' + y = 0$

<u>פתרון:</u>

א. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

השורשים הם $\lambda = 2, \frac{1}{2}$, שניהם ממשיים שונים, לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

ב. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2$$

השורש הוא $\lambda = -\frac{1}{3}$, הוא יחיד. לכן הפתרון להומוגנית הוא:

$$y_h = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p = ae^{2x}$$

ונקבל:

$$\begin{cases} y_p' = 2ae^{2x} \\ y_p'' = 4ae^{2x} \end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$36ae^{2x}+12ae^{2x}+ae^{2x}=e^{2x}$$

$$e^{2x}(36a+12a+a)=e^{2x}$$

ולכן:

$$49a=1\Rightarrow a=\frac{1}{49}$$

כלומר הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p=\frac{1}{49}e^{2x}$$

ובסה"כ פתרון המד"ר זה סכום של ההומוגנית והפרטי:

$$y=y_h+y_p=C_1e^{-\frac{1}{3}x}+C_2xe^{-\frac{1}{3}x}+\frac{1}{49}e^{2x}$$

ג. המשוואה האופיינית היא:

$$0=\lambda^2-8\lambda+7=(\lambda-7)(\lambda-1)$$

השורשים הם $\alpha_1=7,\alpha_2=1$. לכן הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{7x}$$

ד. המשוואה האופיינית היא:

$$0=\lambda^2-2\lambda+10$$

השורשים הם: $\alpha=2\pm3i$. לכן הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{2x}\cos3x+C_2e^{2x}\sin3x$$

ה. המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2+10=0$$

השורשים הם:$\alpha=\pm\sqrt{10}i$ ולכן הפתרון להומוגנית הוא:

$$y_h=C_1\cos\sqrt{10}x+C_2\sin\sqrt{10}x$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p=ax^2+bx+c$$

ונקבל:

$$\begin{cases} y_p' = 2ax + b \\ y_p'' = 2a \end{cases}$$

נציב במד"ר:

$$2a + 10ax^2 + 10bx + 10c = 2x$$

ונקבל את המערכת (מהשוואת מקדמים):

$$\begin{cases} 10a = 0 & x^2 \\ 10b = 2 & x \\ 2a + 10c = 0 & 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{5}, c = 0$$

ולכן:

$$y_p = \frac{1}{5}x$$

ולכן הפתרון הכללי הוא הסכום:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos\sqrt{10}x + C_2 \sin\sqrt{10}x + \frac{1}{5}x$$

ו. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2$$

יש רק שורש אחד: $\alpha = -\frac{1}{2}$ ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

2. מצאו פתרון פרטי של המד"ר עם תנאי התחלה:

(א)

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 7y = 14x^2 - 4x + 3 \\ y(0) = 5 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(ב)

$$\begin{cases} 2y'' - 5y' + 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

(ג)

$$\begin{cases} y'' - 4y' = x^2 - x + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

א. החלק ההומוגני מתאים למד"ר משאלה 1 סעיף ג. הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

נמצא פתרון פרטי, ע"י ניחוש:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

נציב במד"ר:

$$2a - 8(2ax + b) + 7(ax^2 + bx + c) = 14x^2 - 4x + 3$$

$$7ax^2 + (7b - 16a)x + 2a - 8b + 7c = 14x^2 - 4x + 3$$

נעשה השוואת מקדמים, ונקבל:

$$7a = 14$$

$$a = 2$$

$$7b - 16 \cdot 2 = -4$$

$$b = 4$$

$$2 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 7c = 3$$

$$c = \frac{31}{7}$$

כלומר פתרון פרטי של המד"ר הוא:

$$y_p = 2x^2 + 4x + \frac{31}{7}$$

ולכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{7x} + 2x^2 + 4x + \frac{31}{7}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 + \frac{31}{7} \\ 1 = c_1 e + c_2 e^7 + 2 + 4 + \frac{31}{7} \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נציב $c_2 = 5 - \frac{31}{7} - c_1$ ונקבל:

$$1 = c_1 e + e^7(5 - \frac{31}{7} - c_1) + 6 + \frac{31}{7}$$

$$c_1(e - e^7) = -5 - \frac{31}{7} + e^7(-5 + \frac{31}{7})$$

$$c_1 = \frac{-5 - \frac{31}{7} + e^7(-5 + \frac{31}{7})}{e - e^7}$$

$$c_2 = 5 - \frac{31}{7} - \frac{-5 - \frac{31}{7} + e^7(-5 + \frac{31}{7})}{e - e^7}$$

ב. החלק ההומוגני מתאים למד"ר משאלה 1 סעיף א. ולכן נקבל:

$$y_h = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x}$$

2 הוא שורש של המשוואה האופיינית, לכן נמצא פתרון פרטי, ע"י ניחוש:

$$y = axe^{2x}$$

$$y' = ae^{2x} + 2axe^{2x} = (a + 2ax)e^{2x}$$

$$y'' = 2ae^{2x} + 2(a + 2ax)e^{2x} = (4a + 4ax)e^{2x}$$

נציב במד"ר:

$$2(4a + 4ax)e^{2x} - 5(a + 2ax)e^{2x} + 2axe^{2x} = e^{2x}$$

$$8a+8ax-5a-10ax+2ax=1$$

$$3a=1$$

$$a=\frac{1}{3}$$

כלומר:

$$y_p=\frac{1}{3}xe^{2x}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y=y_h+y_p=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{2x}$$

נמצא את הקבועים ע"י תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases}0=c_1+c_2\\ 2=c_1e+c_2e^4+\frac{2}{3}e^4\end{cases}$$

נציב מהמשוואה הראשונה $c_2=-c_1$ ונקבל:

$$2=ec_1-e^4c_1+\frac{2}{3}e^4$$

$$c_1(e-e^4)=2-\frac{2}{3}e^4$$

$$c_1=\frac{2-\frac{2}{3}e^4}{e-e^4}$$

$$c_2=-\frac{2-\frac{2}{3}e^4}{e-e^4}$$

ג. המשוואה האופיינת למד"ר ההומוגנית היא:

$$\lambda^2-4\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-4)=0$$

ולכן פתרון ההומוגנית הוא:

$$y_h=c_1e^{0x}+c_2e^{4x}=c_1+c_2e^{4x}$$

כיון שאין במד"ר y, נמצא פתרון פרטי ע"י ניחוש:

$$y=ax^3+bx^2+cx$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

נציב במד"ר:

$$6ax + 2b - 4(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 - x + 1$$

$$-12ax^2 + (6a + 2b)x + 2b - 4c = x^2 - x + 1$$

נעשה השוואת מקדמים:

$$-12a = 1$$

$$a = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{6}{12} + 2b = -1$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} - 4c = 1$$

$$c = -\frac{3}{8}$$

ונקבל:

$$y_p = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 + c_2e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x$$

נמצא את הקבועים בעזרת תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = 4c_2e^{4\cdot 1} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$c_2 = \frac{17}{96e^4}$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$1 = c_1 + \frac{17}{96e^4}$$

$$c_1 = 1 - \frac{117}{96e^4}$$