אלגברה מופשטת - תרגיל 1

<u>שאלה 1</u>

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$;

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$;

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$.

<u>שאלה 2</u>

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: חבורה למחצה/ מונואיד/ חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית (כלומר $ab=ba$ לכל a,b השייכים למבנה).

א. $(\mathbb{Z},\bullet)$ כאשר $a\bullet b=a+b+2$;

ב. $(\mathbb{Z},-)$.

<u>שאלה 3</u>

תהיינה $(G,\bullet),(H,*)$ חבורות. נגדיר פעולה $\cdot$ על המכפלה הקרטזית $G\times H$ כדלהלן: $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)$.

הוכיחו כי $G\times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

שאלה 4

א) האם $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0 \right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת כפל מטריצות)?

ב) תהי $G=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A,B,C\in\mathbb{R} \right\}$. הוכיחו ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות (חבורה זו נקראת **Heisenberg group**). האם היא אבלית (כלומר, האם הפעולה בחבורה היא קומוטטיבית)?

שאלה 5

תהי S חבורה למחצה סופית, ונניח שמתקיים $aS=Sa=S$ לכל $a\in S$. הוכיחו ש- S מונואיד.

שאלה 6

יהי $(M,\cdot)$ מונואיד, ויהי $a\in M$ איבר הפיך. נגדיר $x*y=x\cdot a\cdot y$. בתרגול הוכחנו ש- $(M,*)$ הוא מונואיד. כעת הוכיחו ששני המונואידים $(M,\cdot)$ ו- $(M,*)$ הם איזומורפיים.

בהצלחה!