תרגול 7 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

1 סכום ישר של תתי-מרחבים

הגדרה 1.1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U, W \leq V$ תתי-מרחבים. אומרים שסכום $U + W$ הוא **סכום ישר**, ומסמנים $U \oplus W$, אם לכל $v \in U + W$ קיימת הצגה יחידה בצורה $v = u + w$ עבור $u \in U$ ו-$w \in W$.

משפט 1.2. הסכום $U + W$ הוא ישר אם ורק אם $U \cap W = \{0\}$.

תרגיל 1.3. נסתכל על $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, ונגדיר את תתי-המרחבים הבאים:

$$\begin{aligned} U &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \middle| A = \alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\right\} \\ W &= \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \middle| \mathrm{tr}\,(A) = 0\right\} \end{aligned}$$

הוכיחו כי $\mathbb{R}^{2\times 2} = U \oplus W$.

הוכחה. צריך להראות שני דברים:

1. $\mathbb{R}^{2\times 2} = U + W$: כלומר, צריך לכתוב כל מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כסכום של מטריצה סקלרית ומטריצה עם עקבה 0. מקבלים כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & \dfrac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

2. $U \cap W = \{0\}$: נניח $A \in U \cap W$. לכן $A = \alpha I$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$, אבל $2\alpha = \mathrm{tr}\,(A) = 0$. לכן $\alpha = 0$, כלומר $A = 0$.

לכן $\mathbb{R}^{2\times 2} = U \oplus W$.

□

2 תת-המרחב הנפרש

הגדרה 2.1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$, ויהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. ביטוי מהצורה $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ נקרא **צירוף לינארי**.

דוגמה 2.2. נסתכל על $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$. אזי $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} e \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי.

מוטיבציה. נתונה תת-קבוצה $S \subseteq V$ שהיא לא בהכרח תת-מרחב של V. רוצים למצוא את תת-המרחב הכי קטן של V המכיל את S.

הגדרה 2.3. תהי $S \subseteq V$ תת-קבוצה. נגדיר

$$\text{Span}\left(S\right) = \left\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \middle| n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}, v_1, \ldots, v_n \in S\right\}$$

אם $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה סופית, אזי

$$\text{Span}\left\{v_1, \ldots, v_n\right\} = \left\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \middle| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\right\}$$

הערה 2.4.

1. תמיד $\text{Span}\left(S\right) \leq V$.
2. $\text{Span}\left(S\right)$ הוא תת-המרחב הכי קטן המכיל את S. כלומר, אם $U \leq V$ מקיים $S \subseteq U$, אזי $\text{Span}\left(S\right) \subseteq U$.
3. מגדירים $\text{Span}\varnothing = \{0\}$.

דוגמה 2.5.

1. ב-$\mathbb{R}^2$, נסתכל על $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$. אזי

$$\text{Span}\left(S\right) = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha + 2\beta\\0\end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\gamma\\0\end{pmatrix} \middle| \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

2. ב-$\mathbb{R}^{2\times2}$, נסתכל על $S = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. אזי

$$\text{Span}\left(S\right) = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

טענה 2.6 (תכונות ה-Span).

1. $S \subseteq \text{Span}\left(S\right)$.
2. $\text{Span}\left(\text{Span}\left(S\right)\right) = \text{Span}\left(S\right)$.
3. אם $A \subseteq B$, אזי $\text{Span}\left(A\right) \subseteq \text{Span}\left(B\right)$.

תרגיל 2.7. יהי $V = \mathbb{R}^3$. מצאו את $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון. ניקח וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, ונרצה לדעת האם קיימים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, רוצים לדעת מתי למערכת הבאה יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 3 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-2x \\ 0 & -1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & 2x-y+z \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{-R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 2x-y \\ 0 & 0 & 0 & 2x-y+z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3x+2y \\ 0 & 1 & -1 & 2x-y \\ 0 & 0 & 0 & 2x-y+z \end{array}\right)$$

לכן: יש פתרון אם ורק אם $2x - y + z = 0$. לכן,

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, 2x - y + z = 0 \right\}$$

תרגיל 2.8. יהיו $A, B \subseteq V$.

1. האם $\operatorname{Span}(A \cap B) = \operatorname{Span}(A) \cap \operatorname{Span}(B)$?
2. האם $\operatorname{Span}(A \cup B) = \operatorname{Span}(A) \cup \operatorname{Span}(B)$?

פתרון.

1. לא! ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. אזי $\operatorname{Span}(A) = \operatorname{Span}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$, אבל $A \cap B = \varnothing$, ולכן $\operatorname{Span}(A \cap B) = \{0\}$.
2. לא! כי איחוד של תתי-מרחבים הוא בדרך כלל לא תת-מרחב (אלא אם אחד מוכל בשני). ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. אזי $\operatorname{Span}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\operatorname{Span}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$, ולכן $\operatorname{Span}(A) \cup \operatorname{Span}(B)$ הוא שני הצירים. אבל $\operatorname{Span}(A \cup B) = \mathbb{R}^2$ הוא כל המרחב.

3 תלות ובלתי-תלות לינארית

הגדרה 3.1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1, \ldots, v_n$ וקטורים.

1. **הצירוף הלינארי הטריוויאלי** שלהם הוא $0v_1 + \cdots + 0v_n = 0$.

2. נאמר ש-$v_1,\ldots,v_n$ **בלתי-תלויים לינארית (בת"ל)**, או ש-$\{v_1,\ldots,v_n\}$ בלתי-תלויה לינארית, אם הצירוף הלינארי המתאפס היחיד שלהם הוא הטריוויאלי. כלומר,

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0\Rightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$$

3. נאמר ש-$v_1,\ldots,v_n$ **תלויים לינארית (ת"ל)**, או ש-$\{v_1,\ldots,v_n\}$ תלויה לינארית, אם הם לא בלתי-תלויים לינארית. כלומר, אם קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$, לא כולם אפס, כך ש-$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0$.

הערה 3.2. $\varnothing$ מוגדרת להיות בלתי-תלויה לינארית.

דוגמה 3.3. ב-$V=\mathbb{R}^2$, נסתכל על הווקטורים $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. כדי לבדוק האם הם בת"ל, נניח שיש צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

רוצים לפתור את המערכת עבור α,β:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&1&0\\5&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|c}5&3&0\\2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\2&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1+R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right)$$

לכן בהכרח $\alpha=\beta=0$. כלומר, הווקטורים הנתונים בת"ל.

תרגיל 3.4. נתבונן ב-$\mathbb{R}_2[x]$ בווקטורים

$$f_1(x)=1+3x+x^2,\ f_2(x)=1+4x+3x^2,\ f_3(x)=2+3x,\ f_4(x)=8x+x^2$$

האם הם ת"ל או בת"ל?

פתרון. יהי צירוף לינארי מתאפס:

$$\alpha\left(1+3x+x^2\right)+\beta\left(1+4x+3x^2\right)+\gamma\left(2+3x\right)+\delta\left(8x+x^2\right)=0$$

כלומר

$$(\alpha+\beta+2\gamma)+(3\alpha+4\beta+3\gamma+8\delta)\,x+(\alpha+3\beta+\delta)\,x^2=0$$

כדי שהפולינום ייצא אפס, צריך שכל המקדמים יתאפסו. כלומר,

$$\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\3\alpha+4\beta+3\gamma+8\delta=0\\\alpha+3\beta+\delta=0\end{cases}$$

על ידי דירוג, מקבלים שהפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix}10\frac{3}{4}\delta\\3\frac{1}{4}\delta\\3\frac{3}{4}\delta\\\delta\end{pmatrix}$. קיבלנו שיש פתרון לא טריוויאלי, ולכן הווקטורים ת"ל.

אלגוריתם 3.5 (אלגוריתם לבדיקת תלות ואי-תלות)**.**

1. שמים את הווקטורים בעמודות מטריצה.
2. מדרגים את המטריצה (עם פעולות שורה).
3. אם קיבלנו עמודה בלי איבר מוביל, הווקטורים ת"ל. אחרת, הם בת"ל.

תרגיל 3.6. מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ הווקטורים הבאים בת"ל:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 3a \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. לפי האלגוריתם, נשים את הווקטורים בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a & 3a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - aR_1 \to R_3]{R_2 - aR_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 3a-a^2 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & -a \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

הערכים החשודים: $a = 0, 1, 3$ (לכל ערך אחר אין איבר מוביל שמתאפס). אם $a = 0, 1$, רואים שיש שורת אפסים; אם $a = 3$, המטריצה עדיין לא מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן גם פה הווקטורים ת"ל. בסך הכל, הווקטורים בת"ל אם ורק אם $a \neq 0, 1, 3$.

תרגיל 3.7. נניח כי $v_1, \dots, v_n$ ת"ל. הוכיחו כי קיים וקטור מביניהם שהוא צירוף לינארי של האחרים.

הוכחה. הווקטורים ת"ל, ולכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, לא כולם אפס, שעבורם $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. נניח <u>**בה"כ**</u> כי $\alpha_1 \neq 0$. לכן

$$v_1 = -\frac{\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n}{\alpha_1}$$

□