אלגברה לינארית 1 תרגול 6 תשפ"א

22 ביולי 2021

1 הפיכות

תרגילים:

1. הגדרה: מטריצה $A \neq 0$ נקראת "מחלקת אפס" אם קיימת $B \neq 0$ כך ש־ $AB = 0$.
הוכיחו: $A \neq 0$ ריבועית לא הפיכה אמ"ם היא מחלקת אפס.
פתרון: $\Leftarrow$: נתון: A מחלקת אפס, צריך להוכיח שלא הפיכה. כלומר, ישנה מטריצה B כך ש־ $AB = 0$, נב"ש שהיא הפיכה, נכפיל בהופכית משמאל, ונקבל $B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$ בסתירה לכך ש־ $B \neq 0$.
$\Rightarrow$: טענה: אם $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לא הפיכה, אז יש פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומ' $Ax = 0$. הוכחה: נדרג את A לצורה הקנונית, ומכיון שהיא לא הפיכה נקבל שיש משתנה חופשי (כי אחרת, בכל עמודה יש איבר מוביל, ואז הצורה הקנונית היא מטריצת היחידה ו־A הפיכה בסתירה). כיון שיש משתנה חופשי, אז למערכת ההומ' יש פתרון שונה מאפס.
נסמן פתרון זה ב־v. נתבונן במטריצה $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ v & \cdots & v \\ | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה עם n עמודות, שכל אחת היא הוקטור v. נקבל:
$$AB = \begin{pmatrix} & & \\ Av & \cdots & Av \\ & & \end{pmatrix} = 0$$
כי:
$$\forall j : C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = Av = 0$$

2. תהא A ריבועית הפיכה. תהא B מטריצה המתקבלת מהחלפת שורות 1־2 של A.
כלומר, $A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B$. מה הקשר בין A^{-1} לבין B^{-1}?
פתרון:

3. תהא $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(א) עבור אילו ערכי a המטריצה A הפיכה?

פתרון:

(ב) עבור איזה ערך a (אם בכלל) מתקיים:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

4. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(א) מצאו מטריצה B כך ש- $AB = I$.

תחילה נמצא את $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ לפי האלגוריתם:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

כלומר,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נגדיר:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נקבל:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$$

(ב) האם יש B יחידה שעושה זאת?

לא. למשל נוכל לעשות את אותו רעיון, עם למצוא את ההופכית של שתי העמודות האחרונות של A, ולשים את התוצאה בשתי השורות האחרונות של B עם שורה ראשונה אפסים.

(ג) האם קיימת B כך ש- $BA = I$?

נגדיר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זה לא עובד, ולא רק לא עובד, זה בלתי אפשרי. הוכחה: נב"ש שיש $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ כך ש- $BA = I_3$, נקבל:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA = I_3$$

וזה לא ייתכן, כי שתיהן לא הפיכות (שורת או עמודת אפסים), ומכפלה של לא הפיכות היא לא הפיכה.

פתרון נוסף: למטריצה A יש יותר עמודות משורות, ולכן לאחר דירוג קנוני נקבל שבוודאי יש לפחות משתנה חופשי אחד. לכן למערכת $Ax = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי, ופתרון זה הוא פתרון גם למערכת ההומ' $BAx = 0$ (לכל B).

הסבר: נניח שיש $v \neq 0$ כך ש- $Av = 0$, אז נקבל:

$$(BA)v = B(Av) = B0 = 0$$

ולכן המטריצה BA לא הפיכה, כי יש פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומ' המתאימה.

2 מרחבים וקטוריים

נדבר על מרחב וקטורי V (קבוצה שאיבריה נקראים וקטורים) מעל שדה $\mathbb{F}$, עם חיבור וקטורים וכפל בסקלאר.

תרגילים:

1. האם הבאים הינם מ"ו:

(א) $V=\mathbb{R}^2$ עם חיבור רגיל וכפל בסקלאר: $\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\y\end{pmatrix}$?

פתרון: החיבור רגיל וראיתם שעובד. פילוג של כפל בסקלאר עם חיבור:

$$\alpha\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}\right)=\alpha\begin{pmatrix}x+z\\y+w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha z\\y+w\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$$

ראיתם $\alpha u=0$ אמ"ם $\alpha=0\vee u=0$. וזה לא עובד פה כי ניתן לקחת $\alpha=0,u=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ואז $\alpha u\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ בסתירה.

(ב) $V=\mathbb{R}^2$ עם חיבור רגיל וכפל: $\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2x\\\alpha^2y\end{pmatrix}$?

פתרון: נראה שהפילוג לא עובד:

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)^2x\\(\alpha+\beta)^2y\end{pmatrix}\underset{\alpha=\beta=1}{\neq}\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)x\\(\alpha^2+\beta^2)y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

2.1 תתי־מרחבים

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. תת־קבוצה $W\subseteq V$ תיקרא תת־מרחב וקטורי אם מתקיים:

- $0_v\in W$
- סגירות לחיבור: $u,v\in W\Rightarrow u+v\in W$
- סגירות לכפל בסקלאר: $u\in W,\alpha\in\mathbb{F}\Rightarrow\alpha u\in W$

ניתן לקצר את שני התנאים האחרונים לבדיקה אחת:

$$\forall u,v\in W,\alpha\in\mathbb{F}:u+\alpha v\in W$$

הערה: לכל מרחב וקטורי V מתקיים: $V,\{0\}$ הינם תתי־מרחבים. הם נקראים "הטריוויאליים".

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו: W הוא תת־מרחב של V במקרים הבאים:

(א) $V=\mathbb{F}^{n\times n},W=\{A\in V|A^t=A\}$

פתרון: נבדוק: $0\in W$, כי מטריצת האפס סימטרית. תהיינה $A,B\in W$ סימטריות, ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$, נקבל:

$$(A+\alpha B)^t=A^t+(\alpha B)^t=A+\alpha B$$

כלומר $A+\alpha B$ סימטרית ולכן $A+\alpha B\in W$. בסה"כ W ת"מ.

(ב) $V=\mathbb{F}^{n\times n}, W=\{A\in V|A^t=-A\}$

פתרון: גם כאן $0\in W$. תהיינה $A,B\in W$ $\alpha\in\mathbb{F}$:

$$(A+\alpha B)^t=A^t+\alpha B^t=-A-\alpha B=-(A+\alpha B)$$

ולכן $A+\alpha B\in W$, ו־W ת"מ.

(ג) $V=\mathbb{F}^{n\times n}, W=\{A\in V|A^t=A\}\cup\{A\in V|A^t=-A\}$. כלומר, W זה אוסף המטריצות שהן סימטריות או אנטי־סימטריות.

פתרון: משפט אומר, שעבור תתי מרחבים $W,U\leq V$ מתקיים: $U\cup W$ ת"מ אמ"ם $W\cup U \vee W\subseteq U$. איך ההוכחה עובדת? אם אין הכלה באף כיוון, אז יש $U\setminus W, w\in W\setminus U$ $u\in$, ואז נקבל $u+w\notin U\cup W$. למשל אצלנו ניקח:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

סימטרית. וניקח

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\notin W$$

לא סימטרית, ולא אנטי־סימטרית.

(ד) $V=\mathbb{R}_2[x], W=\{ax^2+bx+c\in V|b\neq 0\}$.

פתרון: נשים לב ש־ $0_v=0x^2+0x+0$, ונקבל שבוקטור האפס נדרש $b=0$, ולכן $0_V\notin W$, ולכן W לא ת"מ.

2.2 חיתוך, סכום וסכום ישר

תרגילים:

1. $V=\mathbb{R}^4$. עבור $W_1=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}:\begin{matrix}a+b=c+d\\-a+2c=0\end{matrix}\right\}, W_2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}:\begin{matrix}a-3b-5c=d\\4b+8c-2d=2a\end{matrix}\right\}$.

מצאו את $W_1\cap W_2, W_1+W_2$.

פתרון: נתחיל מהסכום, נשים לב שכל ת"מ, הוא בעצם אוסף פתרונות של מערכת הומ'. אצלנו המערכות הן:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\-2&4&8&-2\end{pmatrix}$$

נמצא תחילה ייצוג של הפתרונות של כל אחת:

$$W_1=N\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix}2s\\t-s\\s\\t\end{pmatrix}\mid t,s\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\mid t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

$$W_2=N\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\-2&4&8&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\0&1&1&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&-2&5\\0&1&1&2\end{pmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}2s-5t\\-2t-s\\s\\t\end{pmatrix}\mid t,s\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\mid t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

הסכום שלהם הוא:

$$\left\{t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\mid t,s,r\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לגבי החיתוך: כל מרחב הוא אוסף פתרונות של מערכת הומ', ולכן החיתוך הוא אוסף הפתרונות של שתי המערכת: כדי להיות גם ב־ W_1 וגם ב־ W_2 צריך להיות פתרון לשתי המערכות. במילים אחרות:

$$W_1\cap W_2=N\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&2&0\\1&-3&-5&-1\\-2&4&8&-2\end{pmatrix}$$

נחשב:

$$N\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&2&0\\1&-3&-5&-1\\-2&4&8&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&-1\\1&0&-2&5\\0&1&1&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&5\\0&0&0&3\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}2t\\-t\\t\\0\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

2. מצאו סכום וחיתוך של:

$$W_1=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}:\forall i<jA_{i,j}=0\},W_2=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}:\forall i>jA_{i,j}=0\}$$

פתרון: נשים לב ש־ W_1 זה אוסף המטריצות כך שמעל האלכסון יש 0, ו־ W_2 זה אוסף המטריצות כך שמתחת האלכסון יש 0. לכן בחיתוך צריך להיות 0 גם מעל וגם מתחת, ורק על האלכסון אפשר לשים מה שרוצים, מה שנקרא מטריצות אלכסוניות:

$$W_1\cap W_2=\left\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\mid\forall i\neq j:A_{i,j}=0\right\}$$

טענה: $W_1+W_2=\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכחה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר שתי מטריצות $A_1\in W_1,A_2\in W_2$ כך ש־ $A_1+A_2=A$, באופן הבא:

$$(A_1)_{i,j}=\begin{cases}0&i<j\\A_{i,i}&i=j\\A_{i,j}&i>j\end{cases}$$

$$(A_2)_{i,j}=\begin{cases}A_{i,j}&i<j\\0&i=j\\0&i>j\end{cases}$$

נשים לב כעת שנקבל:

$$(A_1+A_2)_{i,j}=(A_1)_{i,j}+(A_2)_{i,j}=\begin{cases}0+A_{i,j} & i<j\\ A_{i,j}+0 & i=j\\ A_{i,j}+0 & i>j\end{cases}$$

כלומר:

$$(A_1+A_2)_{i,j}=A_{i,j}$$

3. $V=\mathbb{R}^n$. מצאו חיתוך וסכום של:

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}:a_1=\cdots=a_n\right\},W_2=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}:\sum_{i=1}^{n}a_i=0\right\}$$

פתרון: נמצא תחילה את החיתוך: $v=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in W_1\cap W_2 \iff \begin{cases}a_1=\cdots=a_n\\ \sum a_i=0\end{cases}$,

ונקבל:

$$0=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_1=n\cdot a_1$$

ולכן נקבל $a_1=0$ ושוב לפי משוואה ראשונה $a_n=\cdots=a_1=0$. בסה"כ $v=0$.

לגבי הסכום, נטען: $W_1+W_2=\mathbb{R}^n$. הוכחה: יהי $v=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. נגדיר $t=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$ ממוצע רכיבי v. וניקח את הוקטורים הבאים:

$$v_1=\begin{pmatrix}t\\ \vdots\\ t\end{pmatrix}\in W_1$$

כעת אנחנו רוצים למצוא $v_2\in W_2$ כך ש־ $v_1+v_2=v$. נגדיר $v_2=v-v_1$. צריך להוכיח $v_2\in W_2$:

$$\sum_{i=1}^{n}(v_2)_i=\sum_{i=1}^{n}(v-v_1)_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i-t)=-nt+\sum_{i=1}^{n}a_i=-nt+nt=0$$

4. מכאן נגיע להגדרת סכום ישר. יהיו $W,U \leq V$ נקרא לסכום $W+U$ סכום ישר, ונסמנו $W \oplus U$ אם מתקיים: $W \cap U = \{0\}$. נאמר ש־ $W \oplus U = V$ אם $W+U=V \wedge W \cap U = \{0\}$. לדוגמא:

(א) בשאלה 2 ראינו $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n\times n}$, אבל $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, ולכן הסכום לא ישר..

(ב) בשאלה 3 ראינו $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^n$, ו־ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, ולכן נקבל:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^n$$