אנליזה מודרנית – פתרון מועד א' תשע"ג

.1

ד. נוכיח $\le$ וגם $\ge$.

$\le$ נובע מכך ש- m^* σ-תת-חיבורית.

$\ge$ נסמן $I_n=(3n+1,3n+2), E=E_1\cup E_2$ אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ I_n היא מדידה לבג ומתקיים $E\cap I_1=E_1$ וגם $E\cap I_1^c=E_2$ ע"פ מדידות I_1 מקבלים:

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*([E_1\cup E_2]\cap I_1)+m^*([E_1\cup E_2]\cap I_1^c)$$

שזה $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$. ניתן להמשיך באינדוקציה, ולקבל שלכל $N\in\mathbb{N}$ $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N}E_n\right)=\sum_{n=1}^{N}m^*(E_n)$. $\bigcup_{n=1}^{N}E_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ולכן $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\ge m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N}E_n\right)$. יוצא שלכל $N\in\mathbb{N}$ $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\ge\sum_{n=1}^{N}m^*(E_n)$. נשאיף $N\to\infty$ לקבל התוצאה.

.2

ד. מקרה פרטי של שאלה 3 סעיף ד' עם $p=1, f\equiv 0$.

.3

ג. $|g|\le\|g\|_\infty$ כב"מ, ולכן $|fg|\le|f|\|g\|_\infty$ כב"מ. ניקח אינטגרל על אי-שוויון זה לקבל $\|fg\|_1=\int_X|fg|\,d\mu\le\int_X|f|\|g\|_\infty\,d\mu=\|g\|_\infty\int_X|f|\,d\mu=\|g\|_\infty\|f\|_1$. אי שוויון זה מוכיח שאם $\|f\|_1<\infty,\|g\|_\infty<\infty$ אזי $fg\in L^1$. שוויון קורה כאשר $\int_X|fg|\,d\mu=\int_X|f|\|g\|_\infty\,d\mu$ וזה קורה כאשר $|fg|=|f|\|g\|_\infty$ כב"מ.

.4

ד. הסדרה $f_n(x):=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \frac{1}{\pi n}\le x\le 1\\ 0 & 0\le x\le\frac{1}{\pi n}\end{cases}$ מהווה דוגמה נגדית, שכן כל f_n היא רציפה בהחלט – אבל $f_n\to\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ במ"ש בקטע $[0,1]$, ופונקצית הגבול אינה רציפה בהחלט שם (כי אינה בעלת השתנות חסומה)