תרגיל 6 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. מצאו את תחום ההתכנסות של טורי החזקות הבאים.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(2n)!}$

פתרון: נסמן $a_n=\frac{n!}{(2n)!}$ ונשתמש במבחן דאלמבר.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(2n)!}{n!(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}=0$$

לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור: $R=\frac{1}{0}=\infty$.

בפרט, תחום ההתכנסות של הטור: כל x.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)x^n$

פתרון: נסמן $a_n=\ln n$ ונשתמש במבחן דאלמבר.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\overbrace{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}^{\to 0}}{\ln n}\right)="1+\frac{0}{\infty}"=1+0=1$$

לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור: $R=\frac{1}{1}=1$.

נבדוק התכנסות בקצוות:

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)1^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)$.

$\ln n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ לכן לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות טורים והטור מתבדר ב$x=1$.

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)(-1)^n$

$(-1)^n\ln n$ לא שואף לאפס כש n שואף לאינסוף לכן לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות טורים והטור מתבדר ב$x=-1$.

בסה"כ, תחום ההתכנסות של הטור הוא $-1<x<1$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{3n}}{n}$

פתרון: נציב $t=(2x-1)^3$ ונקבל: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{3n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$

נסמן $a_n=\frac{1}{n}$ ונשתמש במבחן קושי הדמר.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$$

לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ הוא $R=\frac{1}{1}=1$.

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ בקצוות:

$t=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הטור מתבדר.

$t=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

לכן, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ הוא $-1\le t<1$.

נחזור ל x. תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{3n}}{n}$ הוא

$$-1\le(2x-1)^3<1$$

נוציא שורש שלישי לכל האגפים (הפונקציה $f(x)=x^3$ היא מונוטונית עולה ממש לכן אי השוויונים ישארו כמו שהם) ונקבל:

$$-1\le 2x-1<1/+1$$
$$0\le 2x<2/:2$$
$$0\le x<1$$

לכן, תחום ההתכנסות של הטור הנתון הוא $0\le x<1$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n-1}}{4^n n^2\ln n}$

פתרון: נשים לב, לכל $x\ne-2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n-1}}{4^n n^2\ln n}=(x+2)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{4^n n^2\ln n}$$

(הבעיה עם $x=-2$ היא שנקבל $(-2+2)^{-1}=0^{-1}=\frac{1}{0}$).

לכן, לכל $x\ne-2$ הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{4^n n^2\ln n}$ מתכנס.

ברור כי שני הטורים הנ"ל מתכנסים ב $x=-2$ (בהצבת $x=-2$ מתקבלים טורי אפסים).

לכן, תחום ההתכנסות של הטור הנתון זהה לתחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{4^n n^2 \ln n}$.

נמצא את תחום ההתכנסות של טור זה.

נציב $t=(x+2)^2$ ונקבל: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{4^n n^2 \ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{4^n n^2 \ln n}$

נסמן $a_n=\frac{1}{4^n n^2 \ln n}$ ונשתמש במבחן קושי הדמר.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n n^2 \ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{4^n n^2 \ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{4^n}\sqrt[n]{n}^2\sqrt[n]{\ln n}}$$

נשים לב, $1\le \ln n\le n$ (החל מ $n=3$)

לכן, $1=\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{\ln n}\le\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$ ולפי מבחן הסנדוויץ', $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1$. לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{4^n}\sqrt[n]{n}^2\sqrt[n]{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{4^n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$$

לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{4^n n^2 \ln n}$ הוא $R=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$.

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{4^n n^2 \ln n}$ בקצוות:

$t=4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{4^n n^2 \ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n n^2 \ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 \ln n}$.

מכיוון ש $\frac{1}{n^2\ln n}<\frac{1}{n^2}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור הנ"ל מתכנס.

$t=-4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{4^n n^2 \ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4^n n^2 \ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

לכן, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{4^n n^2 \ln n}$ הוא $-4\le t\le 4$.

נחזור ל x. תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{4^n n^2 \ln n}$, ולכן גם של הטור המקורי הוא

$$\underbrace{-4\le(x+2)^2}_{always\_true}\le 4$$

נפתור ונקבל:

$$(x+2)^2\le 4$$
$$-2\le x+2\le 2 /-2$$
$$-4\le x\le 0$$

לכן, תחום ההתכנסות של הטור הנתון הוא $-4 \le x \le 0$.

1.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{2n+1}}{4^n \ln n}$

פתרון: נשים לב, לכל $x \neq \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n(2x-1)^{2n-1}}{5^n n} = (2x-1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n(2x-1)^{2n}}{5^n n}$$

(הבעיה עם $x = \frac{1}{2}$ היא שנקבל $\frac{1}{0} = 0^{-1} = (2 \cdot \frac{1}{2} - 1)^{-1}$).

לכן, לכל $x \neq \frac{1}{2}$ הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n(2x-1)^{2n}}{5^n n}$ מתכנס.

ברור כי שני הטורים הנ"ל מתכנסים ב $x \neq \frac{1}{2}$ (בהצבת $x \neq \frac{1}{2}$ מתקבלים טורי אפסים).

לכן, תחום ההתכנסות של הטור הנתון זהה לתחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n(2x-1)^{2n}}{5^n n}$. נמצא את תחום ההתכנסות הזה.

נציב $t = (2x-1)^2$ ונקבל: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n(2x-1)^{2n}}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot t^n}{5^n n}$

נסמן $a_n = \frac{\ln n}{5^n n}$ ונשתמש במבחן קושי הדמר.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{5^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{5^n}\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{5\sqrt[n]{n}}$$

נשים לב, $1 \le \ln n \le n$ (החל מ $n = 3$)

לכן, $1 = \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{\ln n} \le \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ ולפי מבחן הסנדוויץ', $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$. לכן,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{5\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{5 \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot t^n}{5^n n}$ הוא $R = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$.

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot t^n}{5^n n}$ בקצה הימני:

$$t = 5: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot 5^n}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot t^n}{5^n n} .$$

מכיוון ש $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{n}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור הנ"ל מתבדר.

לכן, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n\cdot t^n}{5^n n}$ הוא $-5\le t<5$ או $-5<t<5$.

נחזור ל x ונקבל שתחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n(2x-1)^{2n}}{5^n n}$ ולכן גם של הטור המקורי הוא

$$\underbrace{-5\le(2x-1)^2}_{always\_true}<5 \text{ או } \underbrace{-5<(2x-1)^2}_{always\_true}<5$$

כלומר, בשני המקרים, תחום ההתכנסות הוא:

$$(2x-1)^2<5$$

נפתור ונקבל:

$$(2x-1)^2<5$$

$$-\sqrt{5}<2x-1<\sqrt{5}\,/$$

$$1-\sqrt{5}<2x<1+\sqrt{5}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

לכן, תחום ההתכנסות של הטור הנתון הוא $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(לחילופין, יכולנו לבדוק התכנסות גם בקצה השמאלי:

$$t=-5:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n(-5)^n}{5^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n\cdot t^n}{5^n n}\ .$$

שהינו טור מתכנס לפי מבחן לייבניץ. אבל, יש לשים לב, כי על מנת להשתמש כאן במבחן לייבניץ יש צורך להוכיח שהסדרה $b_n=\frac{\ln n}{n}$ מונוטונית יורדת (החל ממקום מסויים) ושואפת לאפס ואילו הפתרון בדרך זו חסך לנו את הבדיקה הזו).

1.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{n+1}}{2^n+5^n+1}$

פתרון: נציב $t=3x$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{n+1}}{2^n+5^n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{2^n+5^n+1}$$

נחשב את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{2^n+5^n+1}$.

נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{2^n+5^n+1}=t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n+5^n+1}\ .$$

לכן, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{2^n+5^n+1}$ זהה לתחום ההתכנסות של הטור

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{2^n+5^n+1}$. נמצא רדיוס התכנסות של טור זה.

נסמן: $a_n=\frac{1}{2^n+5^n+1}$ ונשתמש במשפט דאלמבר:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}+5^{n+1}+1}\cdot\frac{2^n+5^n+1}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n+1}{2\cdot 2^n+5\cdot 5^n+1}=\frac{1}{5}$$

לכן, רדיוס ההתכנסות הוא $R=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $t=5$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{2^n+5^n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n}}{2^n+5^n+1}$

נשים לב, $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^n+5^n+1}=1\neq 0$. מכיוון שהאיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס, הטור מתבדר.

עבור $t=-5$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{2^n+5^n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n}}{2^n+5^n+1}$.

נשים לב, $\lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n}{2^n+5^n+1}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\underbrace{\left(\frac{5^n}{2^n+5^n+1}\right)}_{\to 1}\not\longrightarrow 0$. (למעשה הגבול לא קיים).

בפרט, מכיוון שהאיבר הכללי לא שואף לאפס, הטור מתבדר.

לכן, תחום ההתכנסות של הטורים ב t הוא: $-5<t<5$.

נציב $t=3x$ ונקבל כי תחום התכנסות של הטור הנתון הוא: $-5<3x<5$.

כלומר:

$$-\frac{5}{3}<x<\frac{5}{3}.$$

2. מצאו את סכום הטורים הבאים ואת תחום התכנסותם:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n$

פתרון: $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$. זהו טור הנדסי עם מנה $2x$.

לכן, $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n=\frac{2x}{1-2x}$

מתכנס בתחום: $-1<2x<1$. כלומר, בתחום: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

2.2. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n-1}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{3} x^{3n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 3nx^{3n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (x^{3n})' \underset{for\_x\in(-R,R)}{=} \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}\right)'$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^3\right)^n \underset{\substack{for\_-1<x^3<1 \\ \Leftrightarrow -1<x<1}}{=} \frac{1}{1-x^3}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=1$.

לפי משפט גזירה איבר איבר, לכל $x \in (-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (x^{3n})' = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{\left(1-x^3\right)^2}\cdot -3x^2 = \frac{x^2}{\left(1-x^3\right)^2}$$

בקצוות התחום $x = \pm 1$, הטור $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ אינו מתכנס. לכן, גם טור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n-1}$ אינו מתכנס בקצוות.

סה"כ, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n-1}$ הוא $-1 < x < 1$ וסכומו בתחום זה

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n-1} = \frac{x^2}{\left(1-x^3\right)^2}$$

2.3. $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^{2n-1}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^{2n-1} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 2n(2x)^{2n-1} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} ((2x)^{2n})' \underset{for\_x\in(-R,R)}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{2n}\right)'$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((2x)^2\right)^n \underset{\substack{for\_-1<(2x)^3<1 \\ \Leftrightarrow -1<4x^2<1 \\ \Leftrightarrow 4x^2<1 \\ \Leftrightarrow 4x^2<1 \\ \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}}}{=} \frac{1}{1-(2x)^2} = \frac{1}{1-4x^2}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{2n} = \frac{1}{1-4x^2}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R = \frac{1}{2}$.

לפי משפט גזירה איבר איבר, לכל $x \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^{2n-1} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{2n}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-4x^2}\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{\left(1-4x^2\right)^2}\cdot(-8x) = \frac{2x}{\left(1-4x^2\right)^2}$$

בקצוות התחום $x=\pm\frac{1}{2}$, הטור $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{2n}$ אינו מתכנס. לכן, גם טור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty}n(2x)^{2n-1}$ אינו מתכנס בקצוות.

סה"כ, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}n(2x)^{2n-1}$ הוא $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ וסכומו בתחום זה

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(2x)^{2n-1}=\frac{2x}{\left(1-4x^2\right)^2}$$

2.4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}$

פתרון: נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{n+1})'}{n!}\underset{for\_x\in(-R,R)}{=}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'.$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\underset{for\_all\_x}{=}xe^x$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=xe^x$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=\infty$.

לפי משפט גזירה איבר איבר, לכל x ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{n+1})'}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(xe^x\right)'=e^x+xe^x$$

תחום ההתכנסות: כל x .

2.5. $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)(x-1)^{2n+2}$

פתרון: נציב $t=x-1$ ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)(x-1)^{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)t^{2n+2}$$

נשים לב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)t^{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(t^{2n+3})'\underset{for\_t\in(-R,R)}{=}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+3}\right)'.$$

נחשב,

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+3}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}(t^2)^n\underset{\substack{for\_-1<t^2<1\\ \Leftrightarrow -1<t<1}}{=}t^3\cdot\frac{1}{1-t^2}=\frac{t^3}{1-t^2}$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+3}=\frac{t^3}{1-t^2}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות $R=1$.

לפי משפט גזירה איבר איבר, לכל $t\in(-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)t^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(t^{2n+3})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+3}\right)' = \left(\frac{t^3}{1-t^2}\right)' = \frac{3t^2(1-t^2)+2t\cdot t^3}{(1-t^2)^2}$$

בקצוות התחום $x=\pm 1$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+3}$ אינו מתכנס. לכן, גם טור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)t^{2n+2}$ אינו מתכנס בקצוות.

סה"כ, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)t^{2n+2}$ הוא $-1<t<1$ וסכומו בתחום זה

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)t^{2n+2} = \frac{3t^2(1-t^2)+2t\cdot t^3}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2-3t^4+2t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2}$$

נחזיר ל x ונקבל, תחום ההתכנסות של הטור הנתון הוא $-1<x-1<1$ כלומר: $0<x<2$.
בתחום זה סכומו:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)(x-1)^{2n+2} = \frac{3(x-1)^2-(x-1)^4}{(1-(x-1)^2)^2}$$

הערה: באחד או יותר מן הסעיפים בשאלה יש צורך להשתמש בטור הידוע הבא:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ לכל x .

בהצלחה! ☺