תורת הקבוצות- תרגיל בית 4

פתרון

1. תהי A קבוצה סדורה היטב, ו $B \subseteq A$. הוכיחו: $otp(B) \leq otp(A)$.
נסמן $otp(A) = \alpha$ ו$otp(B) = \beta$. נניח בשלילה ש$\alpha < \beta$. נסמן $f : A \to \alpha, g : \beta \to B$ איזו' סדר. נסתכל על $f \circ g : \beta \to \beta$. $f \circ g$ היא פו' שומרת סדר, אבל מתקיים ש $f \circ g(\alpha) < \alpha$. סתירה.

2. הוכיחו את "קש"ב לסודרים": יהיו A ו B סדורות היטב, ונניח שיש $f : A \to B$ שומרת סדר, ו$g : B \to A$ שומרת סדר, אז יש $h : A \to B$ איזומורפיזם סדר. (רמז: השתמשו בתרגיל הקודם)
פתרון: פו' שומרות סדר הן חח"ע, לכן $A \cong f(A) \subseteq B$ ו$B \cong g(B) \subseteq A$. מהתרגיל הקודם נקבל ש $otp(A) \leq otp(B)$ ו $otp(B) \leq otp(A)$. בסודרים ידוע שזה גורר $otp(A) = otp(B)$.

3. $\alpha + \gamma = otp(\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\})$ ו $\beta + \gamma = otp(\beta \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\})$. מכיוון ש $\alpha \leq \beta$ אז $\alpha \subseteq \beta$ ולכן $\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\} \subseteq \beta \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}$. משאלה 1 נקבל ש $\alpha + \gamma = otp(\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}) \leq otp(\beta \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}) = \beta + \gamma$.

4. א. מטענה שהוכחנו בתרגול נקבל: $\alpha = \omega + (\alpha - \omega)$. אז $1 + \alpha = 1 + (\omega + (\alpha - \omega)) = (1 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha$. (מכייון שעבור ω כבר הוכחנו את הטענה בכיתה).
ב. באינדוקציה: עבור $n = 0$ ידוע. נניח ש$\alpha = n + \alpha$. נוכיח עבור$n + 1$. ובכן, $(n + 1) + \alpha = n + (1 + \alpha) = n + \alpha = \alpha$.

5. נניח ש $\beta = \gamma + 1$. אז $\alpha + \beta = \alpha + (\gamma + 1) = (\alpha + \gamma) + 1 = S(\alpha + \gamma)$.

6. נניח ש$\alpha + \gamma = \beta$ וגם $\alpha + \delta = \beta$. וכן $\gamma \neq \delta$. בה"כ $\gamma > \delta$. לכן $\alpha + \gamma > \alpha + \delta$. סתירה.

7. הפרכה: נקח: $\alpha = \omega, \beta = 2, \gamma = 1$. מצד אחד, $\alpha + (\beta - 2) = \omega + 1$. מצד שני, $(\alpha + \beta) - \gamma = (\omega + 2) - 1 = otp((\omega + 2) \setminus \{0\} = \omega + 2$.