

## פתרון תרגיל 3 - מבוא לאנליזה 1

1. (א) צ"ל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 3n^2) = -\infty$

**הוכחה:** בהינתן  $M \in \mathbb{R}$  ניקח  $n_0 = \begin{cases} 1 & M > 1 \\ \lceil \sqrt{\frac{1-M}{3}} \rceil + 1 & M \leq 1 \end{cases}$  ואז לכל  $n \geq n_0$  טבעי יתקיים  $1 - 3n^2 < M$ .

אכן, אם  $M > 1$  אז לכל  $n \geq 1$  מתקיים  $1 - 3n^2 < 1 < M$ ,

ואם  $M \leq 1$ , אז לכל  $n \geq \lceil \sqrt{\frac{1-M}{3}} \rceil + 1$  מתקיים בפרט  $n > \sqrt{\frac{1-M}{3}}$  ולכן

$$1 - 3n^2 < 1 - 3 \cdot \left( \sqrt{\frac{1-M}{3}} \right)^2 = 1 - 3 \cdot \frac{1-M}{3} = 1 - (1-M) = M$$

(ב) צ"ל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3 + \sin(\sqrt{n}+1)} = \infty$

**הוכחה:** יהי  $M \in \mathbb{R}$  כלשהו. ניקח  $n_0 = \max\{1, \lceil 2M \rceil\} \in \mathbb{N}$  ואז לכל  $n \geq n_0$  טבעי יתקיים:

$$\frac{2n+1}{3 + \sin(\sqrt{n}+1)} > \frac{2n}{3+1} = \frac{n}{2} \geq \frac{n_0}{2} \geq \frac{\lceil 2M \rceil}{2} \geq \frac{2M}{2} = M$$

(ג) צ"ל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}} = \infty$

**הוכחה:** יהי  $M \in \mathbb{R}$  כלשהו. ניקח  $n_0 = \begin{cases} 1 & M < 0 \\ \lceil 7M^2 \rceil & M \geq 0 \end{cases}$  ואז לכל  $n \geq n_0$  טבעי יתקיים

$$\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}} > M$$

אכן, אם  $M < 0$  אז לכל  $n \geq 1$  מתקיים  $\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}} > 0 > M$ ,

ואם  $M \geq 0$  אז לכל  $n \geq \lceil 7M^2 \rceil$  מתקיים

$$\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}} > \sqrt{\frac{n^2}{2n+5n}} = \sqrt{\frac{n}{7}} \geq \sqrt{\frac{\lceil 7M^2 \rceil}{7}} \geq \sqrt{\frac{7M^2}{7}} = \sqrt{M^2} = M$$

2. (א)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1} \right)^4 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 5n + 7}{3n^3 + n^2 + 1} \right)^4 = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \right)^4 = \left( \frac{6 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} \right)^4 = 16$$

(ב)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot [(n+1) - 1]}{n! \cdot [(n+1) + 1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

(ג)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(n+5) - n}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1} = \frac{5}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(ד)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{6 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n + 3^n}{3^n}}{\frac{6 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^{n-1}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}} = \frac{0 + 1}{6 \cdot 0 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

3. הסדרה  $\{a_n\}$  חיובית  $\Leftrightarrow L \geq 0$ , לכל  $n$  טבעי,  $4a_n + 1 \neq 0$  וכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 1) = 4L + 1 \neq 0$ .  
לכן עפ"י כללי האריתמטיקה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 3a_n}{4a_n + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 3a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 1)} = \frac{L^2 + 3L}{4L + 1}$$

$$\Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Leftrightarrow L^2 + 3L = 4L + 1 \Leftrightarrow \frac{L^2 + 3L}{4L + 1} = 1 \text{ ז"א } L = 1 \text{ או } L = -1$$

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ או } L = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \text{ אבל כפי שראינו } L \geq 0 \text{ ולכן } L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$4. \text{ (א) נסמן } a_n = n + 1 \text{ מתקיים } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \text{ ולכן}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

(ב) נסמן  $a_n = 2 + \sqrt[3]{n}$  מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt[3]{n+1}}{2 + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}}{\frac{2}{\sqrt[3]{n}} + 1} = \frac{0 + \sqrt[3]{1+0}}{0+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \text{ ולכן}$$

(ג) נסמן  $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$  מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \cdot \frac{n!^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!^2(n+1)^2} \cdot \frac{n!^2}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (2n+1)(n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 4 \text{ ולכן}$$

5. (א) לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $|\sin(n)|, |\cos(2n)| \leq 1$  ואם  $n > 1$ :

$$\frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n+\sin(n)}{n+\cos(2n)} \leq \frac{2n+1}{n-1}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+\sin(n)}{n+\cos(n)} = 2 \text{ ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$$

(ב)  $0 < a < b < c$ , לכן לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים

$$c = \sqrt[n]{c^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{c^n + c^n + c^n} = \sqrt[n]{3c^n} = \sqrt[n]{3} \cdot c$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c \text{ ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot c = 1 \cdot c = c = c^{-\infty}$$

(ג) לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $2 < n$

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{2}{n} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}}_{n-2 \text{ times}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \rightarrow 0$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \text{ ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':}$$

(ד) נשים לב שלכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\cos(4n)| \leq 1$  ולכן

$$\left| \frac{2^n \cdot \cos(4n)}{(2n)!} \right| \leq \frac{2^n}{(2n)!} \leq \frac{2^n}{n!}$$

ומכאן ש-

$$-\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n \cdot \cos(4n)}{(2n)!} \leq \frac{2^n}{n!}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2^n}{n!} = 0 \text{ ולכן גם } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \text{ לפי הסעיף הקודם}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \cos(4n)}{n!} = 0 \text{ ועפ"י כלל הסנדוויץ':}$$

(ה) לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים

$$0 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \underbrace{\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n+1 \text{ times}} = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0 \text{ ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':}$$

(ו) לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים

$$0 \leq \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} \leq \sqrt[4]{n} \cdot \left( \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \leq \sqrt[4]{n} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \sqrt[4]{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \rightarrow 0$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}) = 0 \text{ ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ':}$$