פתרון תרגיל 3 – מופשטת 1, קיץ 2011

שאלה 1

נתונה התמורה הבאה ב- S_8: $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&8&7&2&5&4&1\end{pmatrix}$.

(i) רשמו אותה כמכפלת מחזורים זרים, ומצאו את הסדר שלה.

(ii) האם $a\in A_8$?

(iii) מה הסדר של a^{14}?

(iv) רשמו את a^{-1} כמכפלת מחזורים זרים.

פתרון:

(i) $a = (1\ 3\ 8)(2\ 6\ 5)(4\ 7)$. הסדר הוא $\mathrm{lcm}(3,3,2) = 6$.

(ii) $\mathrm{sign}(a) = 1*1*-1 = -1$ ולכן a איננה זוגית.

(iii) $a^{14} = a^{12}*a^2 = (a^6)^2*a^2 = a^2 = (1\ 8\ 3)(2\ 5\ 6)$

(iv) $a^{-1} = (1\ 3\ 8)^{-1}\ (2\ 6\ 5)^{-1}\ (4\ 7)^{-1} = (1\ 8\ 3)(2\ 5\ 6)(4\ 7)$

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ומצא גרעין עבור הנכונות שבהן:

א) קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Z},+)\to\Omega_{2010}$

ב)קיים איזומורפיזם $D_5\to\Omega_{10}$

ג) קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Q},+)\to S_5$

ד) קיים מונומורפיזם $S_3\to GL_3(\mathbb{R})$

פתרון:

א) קיים: Ω_{2010} איזומורפי ל- Z_{2010} (למה?) וקיים אפימורפיזם $f : Z \to Z_{2010}$ הנתון על ידי $f(x) = x \pmod{2010}$.

ב) לא קיים. D_5 אינה אבלית ו- Ω_{10} אבלית ואיזומורפיזם שומר על אבליות.

ג) לא קיים. ראינו שאם $f:G\rightarrow H$ הוא אפימורפיזם ו-G אבלית אז גם H אבלית, אך אין זה המקרה פה.

ד) קיים. ראיתם בהרצאה שעבור חבורת התמורות S_n (עבור n כללי) קיים מונומורפיזם ל- $GL_n(R)$ הנתון (למשל) על ידי שליחת כל חילוף (i j) למטריצה הבאה:

-- הכניסה בשורה ה- i , עמודה ה- j היא 1.

-- הכניסה בשורה ה- j , עמודה ה- i היא 1.

-- עבור $k\neq i,j$, הכניסה בשורה ה-k , בעמודה ה- k היא 1 (ז"א – כל איברי האלכסון הם 1 חוץ מבשורות i,j).

-- שאר הכניסות הם 0.

(מכיוון שאפשר להסתכל על איברי S_n כפועלים על איברי הבסיס של R^n).

מכיוון ש- S_n נוצרת על ידי חילופים, אז ניתן להרחיב מונומור' זה לכל איברי S_n.

<u>שאלה 3</u>

א) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_8$ ושל Ω_{25}

ב) מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\Omega_{25}\times\mathbb{Z}_8$.

<u>פתרון:</u>

א) Ω_{25} איזומורפית ל- Z_{25}.

$Aut(Z_8) = U_8 \rightarrow |\ Aut(Z_8)\ | = |\ U_8| = \phi(8) = 4.$

$Aut(Z_{25}) = U_{25} \rightarrow |\ Aut(Z_{25})\ | = |\ U_{25}| = \phi(25) = 25*(1\text{-}1/5) = 20$

ב) מכיוון ש- $gcd(8,25)=1$ אז $Z_{25}\times Z_8$ איזומורפי ל- Z_{200}.

לכן מספר האוטומורפיזמים הוא $\phi(200) = 200*(1\text{-}1/2)*(1\text{-}1/5)=80$.

<u>שאלה 4</u>

תארו את החבורה הבאה באמצעות טבלה (ז"א, לוח "כפל" ביחס לפעולה המתאימה), וקבעו למה היא איזומורפית: $Aut\left({GL_n\left(\mathbb{Z}_7\right)}/{SL_n\left(\mathbb{Z}_7\right)} \right)$ (לכל n>0).

<u>פתרון:</u>

לכל שדה F, הגרעין של האפימורפיזם det (=דטרמיננטה) $\det : GL_n(F) \to F^*$ הוא $SL_n(F)$. לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש- $GL_n(F)/SL_n(F)$ איזומורפי ל- $(F^*,\cdot)$. בפרט, $GL_n(Z_7)/SL_n(Z_7)$ איזומורפי ל – $U_7 = (Z_7)^*$ וזו חבורה אבלית מסדר 6.

עתה, $U_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$ וזו חבורה ציקלית הנוצרת על ידי 3 (בדקו זאת!). לכן $(U_7,\cdot)$ איזומורפי ל- $(Z_6,+)$. לכן צריך למצוא את $Aut(Z_6)$ וראינו בשיעור ש- $Aut(Z_6)$ איזומורפי ל- $U_6 = \{1,5\}$ ולכן

$Aut(GL_n(Z_7)/SL_n(Z_7))$ איזמורפית לחבורה בת 2 איברים, ז"א ל- $(Z_2,+)$.

כדי לתאר את טבלת הפעולה צריך למצוא מהם האיברים באופן ספציפי.

נסמן $A = GL_n(Z_7)/SL_n(Z_7)$. האיברים ב- A הם מהצורה $a\cdot SL_n(Z_7)$ (מחלקות שמאליות).

האיברים ב-$G = Aut(GL_n(Z_7)/SL_n(Z_7))$ הם מיפוי הזהות: $id:A \to A$, $id(x)=x$

והאוטומורפיזם

$$f : A\to A\ ,\ f(a\cdot SL_n(Z_7)) := (a\cdot SL_n(Z_7))^5 = a^5\cdot SL_n(Z_7)$$

(זאת מכיוון שעבור חבורה אבלית סופית H המיפוי $x\to x^n$ הוא אוטומור' אם $\gcd(n,|H|)=1$).

טבלת ה"כפל" של G (עם האיברים $\{id,f\}$) היא כטבלת החיבור של Z_2.

<u>שאלה 5</u>

תהא $G = U_{10}\times U_{10}$.

א) מהו $Inn(G)$?

ב) הוכיחו או הפריכו:

(i) המיפוי $f(x)=x^4$ הוא אוטומורפיזם של G .

(ii) המיפוי $f(x)=x^5$ הוא אוטומורפיזם של G .

ג) האם $Aut(U_{10})\times Aut(U_{10})$ איזומורפי ל- $Aut(G)$?

<u>פתרון:</u>

א) G אבלית ולכן Inn(G) = {id}.

ב) נשים לב שהסדר של G הוא 16 (כי U_{10} היא ציקלית ולכן איזומורפית ל- Z_4).

(i) זהו לא אוטומורפיזם (כי f אינה חח"ע) – למעשה, ker(f) = G (כי הסדר המקסימלי של כל איבר ב- G הוא 4).

(ii) ראינו שאם H חבורה אבלית סופית ו- gcd(n,|H|) = 1 אז המיפוי $x \rightarrow x^n$ הוא אוטומורפיזם. לכן $x \rightarrow x^5$ הוא אוטומורפיזם.

ג) מהאיברים ב- $Aut(U_{10}) \times Aut(U_{10})$ ניתן להסיק אוטומורפיזמים ב- Aut(G) (כשהם פועלים על כל רכיב במכפלה הקרטזית בנפרד). השאלה היא אם אלו האוטומור' היחידים ב- Aut(G). התשובה היא לא – הפונקציה $f:G \rightarrow G$, כש- f((a,b)) = (b,a) היא אוטומורפיזם ואינה מושרית מפונקציה ב- $Aut(U_{10}) \times Aut(U_{10})$ (למה?).

<u>שאלה 6</u>

א) מצאו מונומורפיזם מפורש מהת"ח הבאה של S_4: $\langle (1234) \rangle$ ל- $GL_4(\mathbb{R})$.

(ז"א – כתבו לאיזו מטריצה עובר כל איבר).

ב) האם U_{14} איזומורפי ל- U_{18}?

ג) האם מספר האפימורפיזמים $\mathbb{Z} \rightarrow \Omega_4 \times \Omega_5$ גדול ממספר האוטומורפיזמים $\mathbb{Z}_{20} \rightarrow \mathbb{Z}_{20}$?

ד) נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:
$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{40}$

ה) הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$, $\mathbb{R} / 5\mathbb{Z} \cong T$ (כאשר $T := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$).

ו) מצאו תמונות אפימורפיות (ז"א: התמונה של החבורה הנתונה תחת אפימורפיזם לחבורה כלשהי, עד כדי איזומורפיזם) של החבורות U_{10} ושל $\mathbb{Z}_{21}$.

<u>פתרון:</u>

א) מצאו מונומורפיזם מפורש מהת"ח הבאה של S_4: $\langle (1234) \rangle$ ל- $GL_4(\mathbb{R})$.

(ז"א – כתבו לאיזו מטריצה עובר כל איבר).

בתת חבורה הנתונה יש 4 איברים: $\{id,(1234),(1234)^2=(13)(24),(1234)^3=(1432)\}$.

נשלח את היוצר למטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. איך בחרנו את המטריצה? בתמורה שלנו 1 הולך ל-2, ולכן שמנו "1" בשורה הראשונה בעמודה השניה; 2 הולך ל-3, ולכן שמנו "1" בשורה השניה בעמודה השלישית; וכן הלאה. נשים לב שאכן מתקיים:

$$(13)(24)=(1234)^2 \mapsto A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(1432)=(1234)^3 \mapsto A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

וכך בנינו את המונומורפיזם הדרוש.

ב) האם U_{14} איזומורפי ל- U_{18}?

כן.

שתי חבורות אלו הן חבורות אבליות מסדר 6 (בדקו זאת!) ולכן שתיהן איזומורפיות ל- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$.

ג) האם מספר האפימורפיזמים $\mathbb{Z}\to\Omega_4\times\Omega_5$ גדול ממספר האוטומורפיזמים $\mathbb{Z}_{20}\to\mathbb{Z}_{20}$?

$|Aut(\mathbb{Z}_{20})|=\phi(20)=\phi(4)\phi(5)=2\cdot 4=8$. נשים לב כי $\Omega_4\times\Omega_5\cong\mathbb{Z}_{20}$. אפימורפיזם $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{20}$ צריך לשלוח יוצר ליוצר, ולכן האפימורפיזם נקבע על פי התמונה של $f(1)$. ל- $\mathbb{Z}_{20}$ יש $\phi(20)=8$ יוצרים, ולכן מספר האפימורפיזמים $\mathbb{Z}\to\Omega_4\times\Omega_5$ שווה למספר האוטומורפיזמים $\mathbb{Z}_{20}\to\mathbb{Z}_{20}$.

ד) נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$\mathbb{Z}_{40}$, $U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$

<u>תזכורת</u>: $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{mn} \Leftrightarrow (m,n)=1$

מתקיים: $\mathbb{Z}_{40}\cong\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$

כמו כן, שימו לב ש-3 יוצר את U_{10}, לכן זוהי חבורה ציקלית מסדר 4, ולכן היא איזומופית ל-$\mathbb{Z}_4$.

נקבל ש - $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\cong U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$

החבורה $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2$ אינה איזומורפית לאף חבורה נתונה אחרת.

ה) הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$, $\mathbb{R}/5\mathbb{Z}\cong T$ **(כאשר** $T:=\{z\in\mathbb{C}:||z||=1\}$**).**

נתחיל עם $\mathbb{R}/5\mathbb{Z}\cong T$.

כזכור, קיים הומומורפיזם $\mathbb{R}\to T$ המוגדר ע"י $a\mapsto e^{2\pi ia}$. הגרעין של ההומומורפיזם הנ"ל הוא $\mathbb{Z}$ ולכן מתקיים $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$. באותו אופן נבנה הומומורפיזם $\mathbb{R}\to T$ ע"י $a\mapsto e^{2\pi i\frac{a}{5}}$. קל לראות שהגרעין שלו הוא $5\mathbb{Z}$ ולכן מתקיים (לפי איזו' 1) $\mathbb{R}/5\mathbb{Z}\cong T$.

נוכיח כעת את הטענה השניה: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$.

באופן דומה לטענה הקודמת נבנה הומומורפיזם $\mathbb{R}^2\to T^2$ ע"י $(a,b)\mapsto\left(e^{2\pi ia},e^{2\pi ib}\right)$. קל לראות שהגרעין הוא $\mathbb{Z}^2$ ולכן הטענה מתקיימת לפי איזו' 1.

ו) מצאו תמונות אפימורפיות (ז"א: התמונה של החבורה הנתונה תחת אפימורפיזם לחבורה כלשהי, עד כדי איזומורפיזם) של החבורות U_{10} ושל $\mathbb{Z}_{21}$.

תמונה אפימורפית של G היא מהצורה G/H עבור $H\lhd G$.

U_{10} איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$ ולכן תמונה שלה תחת אפימורפיזם תהיה איזומורפית לאחת מהחבורות הבאות $\{e\},\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4$. תמונה של $\mathbb{Z}_{21}$ תחת אפימורפיזם תהיה איזומורפית לאחת מהחבורות הבאות: $\{e\},\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_7,\mathbb{Z}_{21}$.

<u>שאלה 7</u>

תהי $Q_8=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:

$ijk=k^2=j^2=i^2=-1$. חבורה זו נקראת **חבורת הקווטרניונים**.
השלימו את לוח הכפל.

א) מצאו את כל תתי החבורות של Q_8

ב) הוכיחו שכל תת חבורה של Q_8 היא תת חבורה נורמלית. (<u>רמז</u>: בדקו את האינדקס של תתי החבורות).

ג) הוכיחו ש- Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4.

<u>פתרון:</u>

ב- Q_8 יש 3 תתי-חבורות מסדר 4:

$\{\pm1,\pm i\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי i,

$\{\pm1,\pm j\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי j,

$\{\pm1,\pm k\}$ ת"ח ציקלית נוצרת על-ידי k.

האינדקס של כל אחת מהן הוא: $[Q_8:H]=\frac{8}{4}=2$

ולכן כל אחת מהן היא נורמלית עפ"י הטענה שכל ת"ח בעלת אינדקס 2 היא נורמלית.

יש ת"ח אחת מסדר 2: $\{1,-1\}$. ת"ח זו היא גם המרכז של חבורת הקווטרניונים כיוון שרק עבור $1,-1$ מתקיים: $1\cdot x=x\cdot 1=x\ \ ,-1\cdot x=x\cdot(-1)=-x$ לכל $x\in Q_8$. לכן היא נורמלית.

כמובן שיש גם ת"ח טריוויאלית מסדר 1 והיא $\{1\}$, והיא נורמלית כי 1 הוא האיבר הנייטרלי של החבורה.

למה אין עוד תתי-חבורות ב- Q_8 ?

לפי משפט לגרנז' סדר כל תת-חבורה מחלק את סדר החבורה, וכיוון ש- $|Q_8|=8$ כל ת"ח של חבורת הקואטרניונים היא מסדר 1,2 או 4.

<u>מסדר 1</u>- $\{1\}$ היא הת"ח היחידה מסדר 1.

<u>מסדר 2</u>- בת"ח מסדר 2 האיבר האחד הוא הניטרלי-1 ולכן השני חייב להיות איבר מסדר 2 ו-(-1) האיבר היחיד מסדר 2 בחבורת הקואטרניונים. לכן אין עוד ת"ח מסדר 2 ב- Q_8.

<u>מסדר 4</u>- ניקח למשל את i (ובאופן סימטרי זה יהיה נכון גם אם נקח את j או k). אז ת"ח זו חייבת להכיל את כל חזקות i כדי שתהיה סגירות לפעולה לכן ת"ח זו מכילה את $\{\pm1,\pm i\}$. זאת אומרת שהת"ח היא לפחות מסדר 4 . אבל לפי לגרנז' אין ת"ח ממש גדולה יותר שמכילה אותה.

לכן מלבד שלוש תתי-החבורות מסדר 4 הנזכרות, אין עוד תתי-חבורות ב- Q_8.

סעיף ג)

Q_8 אינה איזומורפית ל- D_4:

לפי הסעיף הקודם: ב- Q_8 יש שלוש תתי-חבורות מסדר 4 ולעומת זאת, ב- D_4 יש רק תת-חבורה אחת מסדר 4 (חבורת 4 ההזזות: $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$).

לוח הכפל-

$\cdot$	1	i	j	k	−1	−i	−j	−k
1	1	i	j	k	−1	−i	−j	−k
i	i	−1	k	−j	−i	1	−k	j
j	j	−k	−1	i	−j	k	1	−i
k	k	j	−i	−1	−k	−j	i	1
−1	−1	−i	−j	−k	1	i	j	k
−i	−i	1	−k	j	i	−1	k	−j
−j	−j	k	1	−i	j	−k	−1	i
−k	−k	−j	i	1	k	j	−i	−1

<u>שאלה 8</u>

הוכיחו או הפריכו:

א) לכל חבורה G מסדר 2117 קיימת חבורה סופית X עם $rank\left(X\right)=2$ כך ש- G איזומורפית לתת-חבורה כלשהי של X.

ב) אם כל תת-החבורות של חבורה G הן נורמליות, אזי G היא אבלית.

<u>פתרון:</u>

א) לכל חבורה G מסדר 2117 קיימת חבורה סופית X עם $rank\left(X\right)=2$ כך ש- G איזומורפית לתת-חבורה כלשהי של X.

הטענה נכונה. אם ניזכר בעובדה ש- S_n נוצרת ע"י שני איברים, נוכל לשכן את G ב- S_{2117}.

ב) אם כל תת-החבורות של חבורה G היא נורמליות, אזי G היא אבלית.

הטענה אינה נכונה. הדוגמא הנגדית היא חבורת הקווטרניונים.

<u>שאלה 9</u>

א) חשבו את aba^{-1} עבור: (1) $a=(1\ 3\ 5)(1\ 2)$ ו- $b=(1\ 5\ 7\ 9)$.

(2) $a=(1\ 3\ 8)$ ו- $b=(1\ 8\ 3\ 9)$.

ב) מצאו אורך של מסלול הצמדה $[\beta]=\{g^{-1}\beta g: \quad g\in S_{15}\}$ של האיבר $\beta=(3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

<u>פתרון:</u>

א) חשבו את aba^{-1} **עבור:** **(1)** $a=(1\ 3\ 5)(1\ 2)$ **ו-** $b=(1\ 5\ 7\ 9)$**.**

(2) $a=(1\ 3\ 8)$ **ו-** $b=(1\ 8\ 3\ 9)$**.**

(1) $aba^{-1}=\left(a(1)\,a(5)\,a(7)\,a(9)\right)=\left(3179\right)$

(2) באותו האופן, $aba^{-1}=\left(3\,8\,5\,9\right)$

ב) מצאו אורך של מסלול הצמדה $[\beta]=\{g^{-1}\beta g: \quad g\in S_{15}\}$ **של האיבר** $\beta=(3,2,6,9)$ **ואת סדר המייצב של** β **(תחת הצמדה).**

(<u>הערה לגבי סימונים</u>: $orb(a)=G*a$)

למעשה אנו מתבוננים בפעולה של S_{15} על עצמה ע"י הצמדה. אורך מסלול ההצמדה של β הוא מספר האיברים בחבורה אשר צמודים לה; משמע, מספר המחזורים מאורך 4. מתקיים:
$$\left|S_{15}*\beta\right|=\left|conj\left(\beta\right)\right|=\binom{15}{4}(4-1)!=8190.$$

את סדר המייצב ניתן לחשב מהמשפט: $\left|G*x\right|=\left[G:Stb\left(x\right)\right]$. מקבלים:
$$\left|Stb\left(\beta\right)\right|=\frac{15!}{8190}=159,667,200.$$

<u>שאלה 10</u>

עבור $H\le G$ נגדיר את *המנרמל* (או *הנורמליזטור*) של H ב- G:
$$N(H):=\{g\in G: gH=Hg\}.$$

הוכיחו:

א) $N(H)\le G$ ו- $H\lhd G\Leftrightarrow N(H)=G$.

ב) $H\lhd N(H)$.

ג) אם $H\lhd K\le G$ אזי $K\le N(H)$.

ד) נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\left\{\sigma\in S_6:\sigma\left(2\right)=2,\sigma\left(4\right)=4,\sigma\left(6\right)=6\right\}$.

1. הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?
2. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות – K,L כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L\cap K=\{id\}$.

<u>פתרון:</u>

א) $N(H)\le G$ ו- $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$.

נוכיח תחילה כי $N(H)\le G$. ברור ש- $N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G\in N(H)$. יהיו $a,b\in N(H)$. מתקיים: $(ab)H=a(bH)=a(Hb)=(aH)b=(Ha)b=H(ab)$ ולכן $ab\in N(H)$. כעת, יהי $a\in N(H)$. מתקיים: $(a^{-1})H=(aH)^{-1}=(Ha)^{-1}=H(a^{-1})$ ולכן $a^{-1}\in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H\lhd G$ אזי $gH=Hg$ לכל $g\in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

ב) $H\lhd N(H)$.

רואים מההגדרה כי $H\subseteq N(H)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית. קל לראות שלכל $a\in N(H)$ ולכל $h\in H$ מתקיים $aha^{-1}\in H$.

ג) אם $H\lhd K\le G$ אזי $K\le N(H)$.

מספיק להראות ש- K מוכלת ב- $N(H)$ (מדוע?). $H\lhd K$ ולכן <u>לכל</u> $k\in K$ מתקיים $kHk^{-1}=H$, ומהגדרת המנרמל רואים כי $k\in N(H)$. לכן, $K\subseteq N(H)$.

ד) נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma\in S_6:\sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.

3. **הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?**
ההוכחה ש- H היא תת חבורה – פשוט לפי ההגדרה. H לא מזיזה את המספרים $2,4,6$ ולכן ניתן להסתכל על התמורות שלה כעל תמורות של המספרים $\{1,3,5\}$. לכן $H\cong S_3$.
H אינה תת חבורה נורמלית ב- S_6, שכן תת חבורה נורמלית (בחבורת התמורות) צריכה להכיל את כל התמורות מאותו המבנה. עם זאת, $(1\,3\,5)\in H$, אך התמורה הצמודה לה לא נמצאת שם - $(1\,2\,4)\notin H$.
4. **הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות – K,L כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L\cap K=\{id\}$.**
החבורה הראשונה היא H עצמה (שכן היא תת חבורה של המנרמל שלה ואכן איזומורפית ל- S_3). החבורה השניה היא : $K=\{\sigma\in S_6\ :\ \sigma(1)=1,\sigma(3)=3,\sigma(5)=5\}$. מתקיים

$K\cap H=\{id\}$. כמו כן, כל האיברים של K (פרט לתמורת הזהות) זרים לאיברי H ולכן מתקיים: <u>לכל</u> $k\in K$ $kH=Hk$ ולכן $K\le N(H)$. קל לראות מדוע גם K איזומורפית ל-S_3.

<u>שאלה 11</u>

א) נתונה פעולה $G\times X\to X$ כאשר $G:=D_7$ ו- $|X|=19$. הוכיחו או הפריכו: לפעולה זו קיימת נקודת שבת.

ב) כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע את הלוחות ב- 3 צבעים קבועים.

ג) מצאו מספר ריבועים שונים עד כדי סיבובים ושיקופים (עד כדי D_4) אשר מתקבלים מריבוע נתון אם מותר לצבוע צלעות ב-2 צבעים קבועים.

<u>פתרון:</u>

א) נתונה פעולה $G\times X\to X$ כאשר $G:=D_7$ ו- $|X|=19$. הוכיחו או הפריכו: לפעולה זו קיימת נקודת שבת.

הטענה אינה נכונה:

על פי התרגיל שעשינו בכיתה, $|X|$ הוא סכום של מספרים המחלקים את $|G|=14$. המחלקים של 14 הם $\{1,2,7,14\}$ ולכן $|X|=19=1a+2b+7c+14d$. על מנת שתהיה לפעולה זו נקודת שבת, אנו חייבים שיהיה לפחות מסלול אחד באורך 1. משמע, אם $a>0$ אזי יש נקודת שבת.

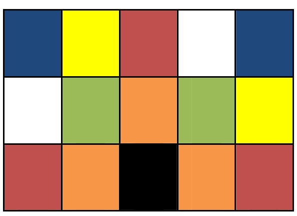
פתרון אפשרי למשוואה: $a=0,b=6,c=1,d=0$.

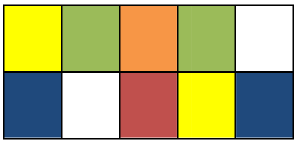
ב) כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע את הלוחות ב- 3 צבעים קבועים.

הלוחות שקולים עד כדי סיבובים, ז"א שהחבורה הפועלת תהיה $A=\{id,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}\le D_4$ כאשר σ הוא סיבוב ב- 90° בכיוון השעון. נסמן ב- X את אוסף כל הצביעות האפשריות. מתקיים $X=(\mathbb{Z}_3)^{25}$. נרצה להשתמש בלמה של ברנסייד ולכן עלינו לחשב את מספר נקודות השבת בפעולה של כל אחד מאיברי החבורה.

$|X_{id}|=3^{25}$, שכן תמורת הזהות אינה מזיזה את הריבוע ולכן מותר לנו לצבוע כל משבצת כרצוננו.

$|X_\sigma|=3^7$, שכן קל להשתכנע כי σ שומרת במקום ריבועים מהצורה:

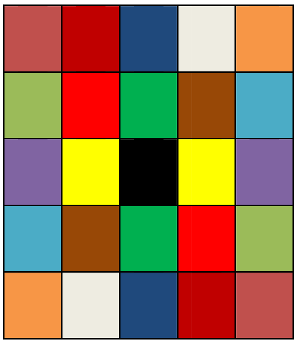




[שימו לב שאין חשיבות לצבעים בתמונה; הצבעים השונים נועדו לסמן את המשבצות שאמורות להיות באותו צבע]. ניתן לראות שיש לנו חופש לבחור לצבוע 7 משבצות ב-3 צבעים, וכל שאר המשבצות יקבעו בהתאם.

$\left|X_{\sigma^3}\right| = 3^7$, שכן σ^3 היא סיבוב ב-90° נגד כיוון השעון (ולכן היא מתנהגת כמו σ).

$\left|X_{\sigma^2}\right| = 3^{13}$, שכן היא משאירה במקום ריבועים מהצורה:



בסה"כ נקבל: מספר המסלולים השונים (משמע, מספר הצביעות השונות) הוא:
$k = \frac{1}{4}\left(3^{35} + 2\cdot 3^7 + 3^{13}\right)$.

ג) מצאו מספר ריבועים שונים עד כדי סיבובים ושיקופים (עד כדי D_4) אשר מתקבלים מריבוע נתון אם מותר לצבוע צלעות ב-2 צבעים קבועים.

בתרגיל זה החבורה הפועלת היא כל D_4, והקבוצה עליה פועלים היא $X = \left(\mathbb{Z}_2\right)^4$. באופן דומה לתרגיל הקודם, נחשב את מספר נקודות השבת של כל איבר בחבורה:

$$\left|X_{id}\right| = 2^4 \;,\; \left|X_{\sigma^3}\right| = \left|X_{\sigma}\right| = 2 \;,\; \left|X_{\sigma^2}\right| = \left|X_{\tau\sigma}\right| = \left|X_{\tau\sigma^3}\right| = 2^2 \;,\; \left|X_{\tau}\right| = \left|X_{\tau\sigma^2}\right| = 2^3$$

ולכן, מספר הצביעות השונות הוא: $k = \frac{1}{8}\left(2^4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3\right) = 6$.

<u>שאלת בונוס 1: 10 נקודות</u>

הוכיחו כי קיימת חבורה לא אבלית יחידה מסדר 6 (עד כדי איזומורפיזם) <u>באמצעות ההדרכה הבאה:</u>

א) תהי G חבורה לא אבלית מסדר 6. הוכיחו שיש לה תת-חבורה יחידה מסדר 3 (רמז: היעזרו בתרגיל שפתרנו בתרגול על חבורות לא-אבליות מסדר 8).

לפי לגרנז' סדרי האיברים האפשריים הם 1,2,3,6. לא יתכן שכולם מסדר 1, לא יתכן שכולם מסדר 2 (כי אז החבורה היא אבלית) ולא יתכן שיש איבר מסדר 6 (אחרת היא ציקלית). לכן קיים איבר מסדר 3, נסמנו ב- σ. אזי $A=\langle\sigma\rangle$ היא תת החבורה הדרושה מסדר 3. נראה שהיא יחידה. קודם כל היא נורמלית (כי היא מאינדקס 2). נניח בשלילה שיש חבורה נוספת מסדר 3. נסמנה H. אזי גם Hנורמלית ולכן AH היא תת חבורה של G. מתקיימת הטענה הבאה (בדקו זאת!): $|AH|=\dfrac{|A||H|}{|A\bigcap H|}$. אצלנו $A\bigcap H=\{e\}$ ולכן $|AH|=9$ בסתירה לסדר החבורה. לכן A היא חבורה יחידה מסדר 3.

ב) הראו שקיים ב- G איבר מסדר 2. כמה איברים כאלו יש?
יש איבר אחד מסדר 1, יש שני איברים מסדר 3 ולכן שלושת האיברים הנותרים הם מסדר 2. נסמן אחד מהם ב- τ.

ג) סמנו את האיבר היוצר את החבורה מסעיף א' ב- σ ואת אחד האיברים מסדר 2 ב- τ.
רישמו את כל איברי החבורה באמצעות σ ו- τ.

$$G=\{e,\tau,\sigma,\sigma^2,\tau\sigma,\tau\sigma^2\}$$

ד) בנו את לוח הכפל של החבורה G והסיקו שיש חבורה לא אבלית יחידה מסדר 6.

	e	τ	σ	σ^2	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
e	e	τ	σ	σ^2	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
τ	τ	e	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	σ	σ^2
σ	σ	$\tau\sigma^2$	σ^2	e	τ	$\tau\sigma$
σ^2	σ^2	$\tau\sigma$	e	σ	$\tau\sigma^2$	τ
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	σ^2	$\tau\sigma^2$	τ	e	σ
$\tau\sigma^2$	$\tau\sigma^2$	σ	τ	$\tau\sigma$	σ^2	e

<u>שאלת בונוס 2: 20 נקודות</u>

א) תהי H תת חבורה של G, G סופית, כך ש-$2|H|=|G|$. עבור $a\in H$ ותת קבוצה $X\subseteq G$ נסמן $[a]_X=\{gag^{-1}:g\in X\}$. מהם היחסים האפשריים בין $|[a]_H|$ לבין $|[a]_G|$?

ב) הראו שאברי A_5 נמצאים ב-5 מחלקות צמידות וחשבו את מס' האיברים בכל אחת ממחלקות הצמידות. ודאו שקיבלתם את כל אברי A_5.

ג) ידוע שעבור כל חבורה G כל תת-חבורה נורמלית שלה היא איחוד של מחלקות צמידות. הראו שניתן להשתמש בנתונים על גודל מחלקות הצמידות (ובמשפט לגרנז') כדי להראות ש- A_5 פשוטה (ז"א – שאין ל- A_5 תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית).

פתרון:

ידוע ש- $\left|[a]_H\right| = \left[H : C_H(a)\right] = \dfrac{|H|}{|C_H(a)|}$, $\left|[a]_G\right| = \left[G : C_G(a)\right] = \dfrac{|G|}{|C_G(a)|}$. לכן:

$\dfrac{\left|[a]_G\right|}{\left|[a]_H\right|} = 2\dfrac{|C_H(a)|}{|C_G(a)|}$ $(*)$. נשים לב שמתקיים: $C_H(a) \le C_G(a)$, $[a]_H \subseteq [a]_G$ ולכן

$\left|[a]_H\right| \le \left|[a]_G\right|$ או $\dfrac{\left|[a]_G\right|}{\left|[a]_H\right|} \ge 1$; וכמו כן $|C_H(a)| \,\big|\, |C_G(a)|$, $|C_H(a)| \le |C_G(a)|$. רואים, אם כן,

כי יש רק שתי אפשרויות עבור סדרי $C_G(a), C_H(a)$ כך ש-$(*)$ תתקיים ו-$\dfrac{\left|[a]_G\right|}{\left|[a]_H\right|} \ge 1$.

א. $|C_H(a)| = |C_G(a)|$ ואז $\left|[a]_G\right| = 2\left|[a]_H\right|$. ז"א, מחלקת הצמידות של a קטנה פי 2 במעבר מ-G ל-H.

ב. $|C_H(a)| = \dfrac{1}{2}|C_G(a)|$ ואז $\left|[a]_G\right| = \left|[a]_H\right| \Leftarrow [a]_G = [a]_H$. ז"א, מחלקת הצמידות נשארת ללא שינוי.

<u>שימו לב:</u> כבר ראינו בתרגול דוגמאות של שני המצבים. אם נבחר $H = A_4$, $G = S_4$ אזי:

עבור $a = (12)(34) \in A_4$ מתקיים $[a]_{S_4} = [a]_{A_4}$; אך עבור $a = (123) \in A_4$ מתקיים $\left|[a]_{A_4}\right| = \dfrac{1}{2}\left|[a]_{S_4}\right|$.

ב) הראו שאברי A_5 נמצאים ב-5 מחלקות צמידות וחשבו את מס' האיברים בכל אחת ממחלקות הצמידות. ודאו שקיבלתם את כל אברי A_5.

אנו יודעים מהן מחלקות הצמידות של S_n, תחילה נרצה להבין כיצד משתנות מחלקות הצמידות של S_n ב-A_n. נתבונן ב-A_n כתת חבורה של S_n.

<u>שימו לב:</u> כדי לקצר את הכתיבה, נכתוב $[x] = conj(x)$ על מנת לסמן את מחלקת הצמידות של x.

נשתמש בשוויון הבא עבור מחלקות צמידות של x בחבורה G: $\left|[x]\right| = \left[G : C_G(x)\right]$ כאשר $C_G(x) = \left\{x : xgx^{-1} = g\right\}$ הוא המרכֵּז של x (או במילים אחרות: $C_G(x)$ הוא המייצב של x ביחס לפעולת ההצמדה). ממשפט לגרנז' עבור חבורות סופיות נקבל $|G| = \left|[x]\right|\left|C_G(x)\right|$. נפעיל את המשפט על תמורה זוגית x, פעם ב- S_n ופעם ב- A_n ונקבל:

$\left|[x]\right|\left|C_{S_n}(x)\right| = n!$ ו- $\left|[x]\right|\left|C_{A_n}(x)\right| = \dfrac{n!}{2}$.

שימו לב: סדר מחלקת הצמידות של תמורה זוגית לא יכול להיות גדול יותר ב- A_n מאשר הוא ב- S_n, וכך גם סדר המרכז של תמורה זוגית, שלא יכול להיות גדול יותר ב- A_n. לכן השוויון שקיבלנו אומר שאחד האיברים במכפלה השמאלית צריך להיות קטן פי 2 והשני צריך להישאר ללא שינוי.

וסה"כ שוויון זה אומר ש:

או שסדר המרכֵּז של תמורה זוגית קטן פי 2 ב- A_n, או שסדר מחלקת הצמידות של תמורה זוגית קטן פי 2, ובמקרה זה מחלקת הצמידות ב- S_n מתפצלת לשתי מחלקות צמידות ב- A_n.

<u>באופן כללי</u>: אחת השיטות לבדוק אילו מחלקות צמידות "מתפצלות" ב- A_n, היא להבין מתי המרכֵּז של מחלקה מסוימת לא משתנה.

סה"כ נראה מהם מבני המחזורים האפשריים של תמורות ב- A_5.

א. תמורת הזהות -ויש אחת כזו ונסמן $|[Id]| = 1$

ב. מחזורים באורך 5 :ויש $\frac{5!}{5} = 24$ תמורות כאל ב- A_5. שימו לב שלפי השוויון שקיבלנו,

מספר האיברים במרכז של מחזור מאורך 5 הוא 5 כי $5 = \frac{120}{24} = \frac{|G|}{|[x]|} = |C_G(x)|$, מכאן

גודל המרכז לא יכול להתחלק ב-2, לכן גודל מחלקת הצמידות חייב להתחלק ל-2.

מחזורים מאורך 5 מתפרקים ב-A_5 לשתי מחלקות צמידות:

ניתן לבדוק (לא נדרש בשאלה זו) ש-

$$[(12345)] = \left\{ \begin{matrix} (14235), (13254), (15342), (14352), (21543), (13542), \\ , (12453), (21435), (21354), (12345), (15432), (15324), \end{matrix} \right\}$$

סה"כ קיבלנו שיש שתי מחלקות צמידות של מחזורים מאורך 5, כל אחת מסדר 12.

ג. מחזורים באורך 3: יש $\frac{5\cdot4\cdot3}{3} = 20$ תמורות כאלו ב- A_5, שמהווים מחלקה אחת ב- S_5. ניתן לראות שבמרכֵּז של מחזורים מאורך 3 נמצאות גם תמורות אי זוגיות (כל מחזור מאורך 2 שֶזר למחזור הנתון). לדוגמה, עבור (123) מתקיים השיוויון $(45)(123)(45) = (123)$, עבור תמורות מאורך 2 ההופכי של איבר שווה לאיבר עצמו. ולכן קיבלנו ש- $(45) \in C_{S_5}((123))$. אבל $(45) \notin A_5$ ולכן המרכֵּז של תמורות מאורך 3 קטן בסדרו כשעוברים מ- S_5 ל- A_5 (כפי שמצאנו, הוא מתחלק ב-2). לכן הסדר של מחלקת הצמידות אינו קטן ומחלקה זו אינה מתפרקת.

ד. תמורות שמיוצגות כמכפלת שני מחזורים זרים באורך 2:
יש $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\frac{1}{2!}\frac{1}{2} = 15$ תמורות כאלו ב- A_5 שמהווים מחלקה אחת ב- S_5. ניתן לראות שסדר של מחלקת צמידות זו אינו יכול להתחלק ב-2, ולכן הוא נשאר זהה ב- A_5.
שימו לב גם שכמו בסעיף קודם ישנם מחזורים מאורך 2 במרכֵּז של איברים במחלקה זו. למשל, אחד המחזורים שמופיע בתמורה $(12)(34) = (34)(12) = (12)((12)(34))(12)$, ולכן גם מנימוק זה מחלקת הצמידות לא מתפרקת ב- A_5.

נסכם את התוצאות בטבלה:

סוג המחזור (מיוצג ע"י מס' האיברים בכל מחזור, בפירוק למחזורים זרים)	**מס' האיברים במרכז ב-** S_5	**מס' האיברים במרכֵּז ב-** A_5	**גודל מחלקת הצמידות ב-** S_5	**גודל מחלקת הצמידות ב-** A_5
11111	120	60	1	1
221	8	4	15	15
311	6	3	20	20
5	5	5	24	ישנן שתי מחלקות מגודל 12

אנו רואים שאכן סכום סדרי כל מחלקות הצמידות ב- A_5 הינו $60 = \frac{5!}{2} = |A_5|$.

ג) ידוע שעבור כל חבורה G כל תת-חבורה נורמלית שלה היא איחוד של מחלקות צמידות. הראו שניתן להשתמש בנתונים על גודל מחלקות הצמידות (ובמשפט לגרנז') כדי להראות ש- A_5 פשוטה (ז"א – שאין ל- A_5 תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית).

לפי משפט לגרנז' (עבור חבורה סופית), סדר של כל תת חבורה מחלק את סדר החבורה. בפרט, סדר של כל תת חבורה נורמלית מחלק את סדר החבורה.

כל תת חבורה נורמלית מכילה את איבר היחידה, ולכן מכילה את המחלקה שמכילה את איבר היחידה, במחלקה זו איבר אחד.

סדרי יתר מחלקות הצמידות הם: 12,12,20,15.

מכיוון שכל תת חבורה נורמלית היא איחוד של מחלקות צמידות, הסדר של חבורה נורמלית (אם קיימת) צריך להיות סכום של איברים מהקבוצה הנ"ל ועוד אחד, שהוא איבר היחידה.

הסכומים האפשריים לאיברים מהקבוצה הם: *13, 16, 21, 25, 33, 36, 40, 45, 48*

ואף אחד מהם אינו סדר אפשרי לתת חבורה (כי הוא אינו מחלק את 60).

כמובן שתתי החבורות הטריוויאליות הן תתי חבורות נורמליות ($\{id\}, A_5$) והן היחידות, לכן זוהי חבורה פשוטה.