תוכן תרגיל כיתה 8

(כולל חומר של הרצאה 7, לא כולל חומר של הרצאה 8)

<u>תזכורת</u>

<u>סימון</u>. תהי קבוצה X ו- $\mathcal{C}$ אוסף תת קבוצות שלה. $\hat{\mathcal{C}}$ היא קבוצת כל האחודים של קבוצות מ- $\mathcal{C}$.

<u>תכונות הקֹבע</u>

(1) $\emptyset \in \hat{\mathcal{C}}$

(2) $\mathcal{C} \subseteq \hat{\mathcal{C}}$

(3) $\hat{\hat{\mathcal{C}}} = \hat{\mathcal{C}}$ (בהרצאה הנוסח השקול היה "אחוד תת קבוצות השייכות ל-$\hat{\mathcal{C}}$ בעצמו שייך ל-$\hat{\mathcal{C}}$")

(4) $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \Rightarrow \widehat{\mathcal{C}_1} \subseteq \widehat{\mathcal{C}_2}$ (לא היה בארצאה אבל ברור וקל לבדוק)

(בהמשך בתור קישור לתכונת קובע מס' (i) נכתוב "תק"ע (i)")

<u>הגדרת הבסיס – הנוסח הראשון</u>

$$\widehat{\mathcal{B}} = T \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \mathcal{B} \subseteq T \\ \text{II. } \end{array} \right.$$

I. $\mathcal{B} \subseteq T$

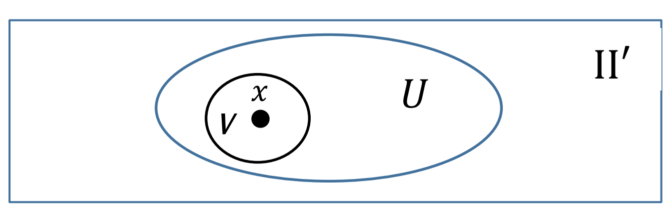
II. כל קבוצה פתוחה אפשר להציג כאחוד קבוצות מ-$\mathcal{B}$.

<u>הגדרת הבסיס – הנוסח השני</u>

$$\widehat{\mathcal{B}} = T \left\{ \begin{array}{l} \text{I'. } \mathcal{B} \subseteq T \\ \text{II'. } \end{array} \right.$$

I'. $\mathcal{B} \subseteq T$

II'. לכל קבוצה $U \in \mathrm{T}$ ולכל $x \in U$ קיימת קבוצה $V \in \mathcal{B}$ כך ש- $x \in V \subseteq U$ (ראה השרטוט)



בעיה 1

א' יהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה T ו- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq T$.

הוכיחו ש-$\mathcal{B}'$ גם בסיס ל-T .

הוכיחה: $\widehat{\mathcal{B}} \subseteq \widehat{\mathcal{B}'}$ לפי תק"ע (4).

לפי התנאי $\mathcal{B}' \subseteq T$ והטופלוגיה סגורה תחת אחודים, לכן $\widehat{\mathcal{B}'} \subseteq T$.

לפי הגדרת הבסיס $\widehat{\mathcal{B}} = T$. וביחד זה גורר :

$$T = \widehat{\mathcal{B}} \subseteq \widehat{\mathcal{B}'} \subseteq T$$

כלומר , $\widehat{\mathcal{B}'} = T$, משל.

ב' יהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה T, $\mathcal{B}' \subseteq T$, ולכל $U \in \mathcal{B}$ ולכל $x \in U$ קיימת קבוצה $V \in \mathcal{B}'$ כך ש- $x \in V \subseteq U$.

הוכיחו ש-$\mathcal{B}'$ בסיס ל-T .

הוכיחה.

מהלמה השימושות מקבלים $\mathcal{B} \subseteq \widehat{\mathcal{B}'}$.

מהתנאי מקבלים ש- $\widehat{\mathcal{B}'} \subseteq T$ כי טופלוגיה סגורה תחת אחודים .

בעזרת תק"ע (3) ו- (4) והגדרת הבסיס מקבבלים:

$$\widehat{\mathcal{B}} \subseteq \widehat{\widehat{\mathcal{B}'}} \subseteq \hat{T} \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}'} = T$$

מש"ל.

ג' יהיו $\mathcal{B}_1$ בסיס לטופולוגיה T_1 ו- $\mathcal{B}_2$ בסיס לטופולוגיה T_2 על אותה קבוצה X. יהי $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$. הוכיחו ש-$T_1 \subseteq T_2$.

הוכחה. בעזרת תק"ע (4) והגדרת הבסיס מקבבלים:

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}_1} \subseteq \widehat{\mathcal{B}_2} \Rightarrow T_1 \subseteq T_2$$

מש"ל.

ד' יהיו $\mathcal{B}_1$ בסיס לטופולוגיה T_1 ו- $\mathcal{B}_2$ בסיס לטופולוגיה T_2 על אותה קבוצה X. חוץ מזה מתקיימים התנאים:

- לכל $U_1 \in \mathcal{B}_1$ ולכל $x \in U_1$ קיימת קבוצה $U_2 \in \mathcal{B}_2$ כך ש- $x \in U_2 \subseteq U_1$.
- לכל $V_2 \in \mathcal{B}_2$ ולכל $x \in V_2$ קיימת קבוצה $V_1 \in \mathcal{B}_1$ כך ש- $x \in V_1 \subseteq V_2$.

<u>הוככיחו</u> ש- $T_1 = T_2$.

<u>הוכחה.</u>

לפי הלמה השימושית והגדרת המסיס: $\mathcal{B}_1 \subseteq \widehat{\mathcal{B}_2} = T_2$. בעזרת תק"ע (3) ו- (4) והגדרת הבסיס

מקבבלים: $T_1 = \widehat{\mathcal{B}_1} \subseteq \widehat{\mathcal{B}_2} = T_2 \Rightarrow T_1 \subseteq T_2$.

בדייוק באותה הלוגיקה מקבלים $T_2 \subseteq T_1$.

כלומר, $T_1 = T_2$, מש"ל.

ה' יהיו $\{\mathcal{C}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ אוסף של כל רכיבי הקשירות של מ"ט (X, T) .

יהי $\mathcal{B}_i$ בסיס הטופולוגיה המושרה על $\mathcal{C}_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

<u>הוכיחו</u> ש-

$$\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{B}_i$$

בסיס ל-T .

<u>הוכחה.</u> ידוע לנו (ההרצאה) שאם קבוצה של כל רכיבי הקשורות היא קבוצה סופית אז כל רכיב קשירות הוא קבוצה פתוחה ב-X .

לכן כל איבר של $\mathcal{B}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ פתוח ב-X .

כלומר $T \subseteq \mathcal{B}_i$ לכל $n \leq i \leq 1$. לכן גם $\mathcal{B} \subseteq T$. כלומר מתקיים הסאיף (I) של הגדרת הבסיס.

תהי $U \in T$. אזי :

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i$$

כאשר $U_i = U \cap \mathcal{C}_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. ברור שכל הקבוצות U_i פתוחות ב-X . לכן לפי הגדרת הבסיס לכל $1 \leq i \leq n$

אפשר להציג את הקבוצה U_i בצורה:

$$U_i = \bigcup_{\alpha \in J_i} V_{\alpha,i} \qquad ,(\, V_{\alpha,i} \in \mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B})$$

ולכן מקלים לבסוף:

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{\alpha \in J_i} V_{\alpha,i} \ ,(\, V_{\alpha,i} \in \mathcal{B})$$

כלומר, גם הסיעף (II) של הגדרת הבסיס מתקיים. אז הוכחנו ש-$\mathcal{B}$ בסיס ל-Tת מש"ל.

<u>בעיה 2</u>

יהי X מ"ט. יהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה ב-X.

<u>הוכיחו</u> ש-X מ"ט האוסדורף אם"ם לכל שתי נקודות שונות $a, b \in X$ קיימות שתי קבוצות $U, V \in \mathcal{B}$ כך ש- $a \in U, b \in V$ ו- $U \cap V = \emptyset$.

<u>הוכחה.</u>

<u>כיוון 1.</u> נניח שהמרחב הוא מרחב האוסדורף. יהיו $a, b \in X$ כך

ש- $a \neq b$ אזי קיימות שתי סביבות U_a, U_b $(a \in U_a, b \in U_b)$ כך ש- $U_a \cap U_b = \emptyset$. לפי הגדרת הבסיס – הנוסח השני – קיימות שתי קבוצות $V_a, V_b \in \mathcal{B}$ כך ש- $a \in V_a \subseteq U_a$, $b \in V_b \subseteq U_b$. אבל נובע מזה ש- $V_a, V_b \in \mathcal{B}$ גם זרות, מש"ל.

כיוון 2.
יהי לכל שתי נקודות שונות $a, b \in X$ קיימות שתי קבוצות זרות $V_a, V_b \in \mathcal{B}$ כך ש- $a \in V_a$, $b \in V_b$. אבל הן פתוחות לפי הגדרת הבסיס. לכן ההגדרת מרחב האוסדורף מתקיימת, מש"ל.

בעיה 3
יהי (X, T) מ"ט אינסופי עם טופולוגיה קו-סופית.
יהי K_n סדרה ב-$\mathbb{N}$ העולה ממש. יהי

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{U \subseteq X | |U^c| = K_n\}$$

הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה T.

הוכיחה

תזכורת . בטופולוגיה קו-סופית קבוצה פתוחה אם"ם היא:

- קבוצה ריקה או
- משלימה סופי.

============

כיוון ש- K_n סדרה עולה ממש, ברור ש- $K_1 < K_2 < K_3 < \cdots \ldots \to \infty$ ו- $\lim_{n \to \infty} K_n = \infty$, כלומר לכל $M \in \mathbb{N}$ קיים n_0 כך ש- $K_n > M$ לכל $n \geq n_0$.
נוכיה שמתקימות סעיפי הגדרת בסיס – הנוסח השני.
(ו') אם $U \in \mathcal{B}$ אז $|U^c| = K_n$ כלומר U^c סופית ולכן $U \in T$.

(II’) יהי U פתוחה ו-$x_0 \in U$. *ישנן שתי אופציות אפשריות:*
<u>אופציה 1</u>: $X = U$. אז בקבוצה X קיימות K_1 נקודות
$x_1, \dots, x_{K_1}$ שונות מ-x_0, כי X אינסופית.
אזי $x_0 \in \left\{x_1, \dots, x_{K_1}\right\}^c$ ו- $\left\{x_1, \dots, x_{K_1}\right\}^c \in \mathcal{B}$.
<u>אופציה 2</u>: $X \neq U$. אזי $U = \{x_1, \dots, x_n\}^c$ לאיזשהוא מספר
טבעי n. אם n מתלכד עם K_i מסוים מהסדרה אז U עצמו שייך
ל-$\mathcal{B}$ ואפשר לקחת $V = U$.
אם n נמצא ממש בין שני איברי הסדרה: $K_i < n < K_{i+1}$, אז
אפשר להשלים את הקבוצה $\{x_1, \dots, x_n\}$ עד הקבוצה
$\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, K_{i+1}\}$
כך ש- $x_0 \notin \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, K_{i+1}\}$. (זה תמיד אפשרי
כי X קבוצה אינסופית). אם נסמן
$V = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, K_{i+1}\}^c$ אז
נקבל $V \in \mathcal{B}$ ו- $x \in V \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}^c = U$. לכן הסעיף (II’)
בהגדרת הבסיס מתקיים.

<u>בעיה 4</u>

<u>הגדרה</u> יהי (X, T) מ"ט ו- $A \subseteq X$. נקודה $a \in A$ נקראת
נקודה מבודדת בקבוצה A אם קיימת סביבה U_a
כך ש- $U_a \cap A = \{a\}$.
==============
יהי $\mathcal{B}$ בסיס של T כך ש-$\mathcal{B}$ בן מניה.
<u>הוכיחו</u> שאם $A \subseteq X$ אינה בת מניה אז A מכילה נקודה לא מבודדת.

<u>הוכיחה:</u> נניח – <u>בשלילה</u> - שכל הנקודות ב-A מבודדות. כלומר,
לכל $a \in A$ קיימת $V_a \in \mathcal{B}$ כך ש- $V_a \cap A = \{a\}$. (*)
נגדיר העתקה $\sigma: A \to \mathcal{B}$ כך ש- $\sigma(a) = V_a$.

נעיר ש- $a \neq b$ גורר $V_a \neq V_b$ כי אחרת $V_a = V_b \Rightarrow V_a \cap A = \{a, b\}$ שסותר ל-(*). כלומר ההעתקה $\sigma: A \to \mathcal{B}$ חח"ע.

לכן $\aleph_0 = |\mathcal{B}| \geq |A|$ ו-A בת מניה. סתירה.

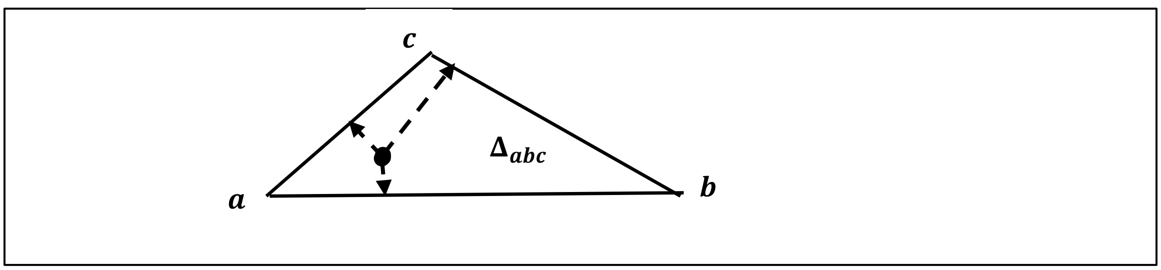
בעיה 5

הוכיחו שאסף משולשים פתוחים הוא בסיס לטופולוגיה הרגילה במישור $\mathbb{R}^2$.

הגדרת – הסבר

אם $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ נקודות במישור שלא שייכות לאותו קו ישר.

תהי נקודה $x \in \mathbb{R}^2$ אינה שייכת לצלעות המשולש. אנחנו נומר ש- x *נמצאת בתוך המשולש* אם האנך שהולך ממנה לכל צלע חותך את הצלע בין קודקודים.



אנחנו ניקרא את קבוצת הנקודות הנמצאות בתוך המשולש abc *משולש פתוח* ונסמן אותה Δ_{abc}.

==========================

נדרש להוכיח שהאוסף

$\mathcal{B}_\Delta = \{\Delta_{abc} \subset \mathbb{R} | a, b, c -$ לא שייכות לאותו ישר $\}$

הוא בסיס לטופולוגית המשור.

הוכחה

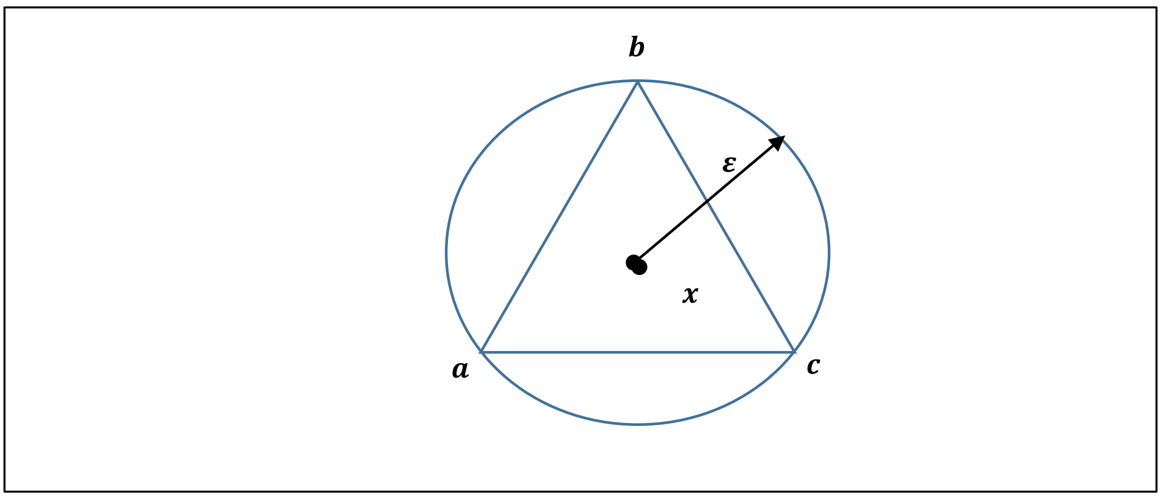
קודם כל נוכיח ש-Δ_{abc} קבוצה פתוחה בטופולוגה הרגילה.

תהי $x \in \Delta_{abc}$. נסבונן בעגול $B(x,r)$ כאשר r המרחק המינימלי מהמרחקים מ-x עד הצלעות. ברור $B(x,r) \subset \Delta_{abc}$. לכן x נקודה פנימית ב-Δ_{abc} מבחינת טופולוגיה הרגילה. ואז Δ_{abc} קבוצה פתוחה.

כך בדקנו את הסעיף (I') מהגדרת הבסיס.

תהי U קבוצה פתוחה בטופולוגיה הרגילה ו-$x \in U$. אזי קיים

עגול $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. אזי ידוע (תיכון) שקיים משולש שווה צלעות החסום במעגל עם מרכז x וראדיוס כך ש-x נמצאת בתוך המשולש.



אז מצאנו Δ_{abc} כך ש- $x \in \Delta_{abc} \subset U$ וכך בדקנו את הסעיף (II') מהגדרת הבסיס. לכן

$\mathcal{B}_\Delta = \{\Delta_{abc} \subset \mathbb{R} | a,b,c -$ לא שייכות לאותו ישר $\}$

בסיס לטופולוגיה הרגילהת מש"ל.

בעיה 6

א' יהי $\mathcal{B}$ בסיס כדורים פתוחים של טופולוגיה רגילה במ"מ M (ההרצאה).
הוכיחו שלכל $R>0$ קיים בסיס $\mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{B}$ כך ש- $\mathcal{B}_R = \{B(x,r) | r \le R\}$.

הוכיחה.
כל איבר של $\mathcal{B}_R$ הוא כדור פתוח ולכן קבוצה פתוחה בטופולוגיה הרגילה של M (סעיף (I') של הגדרת הבסיס).
אם U קבוצה פתוחה ו-$x \in M$, אז קיים כדור $B(x,r_1) \subseteq U$ $(r_1 > 0)$. אם נסמן $r = \min\{r_1, R\}$ אז נקבל:
$$x \in B(x,r) \subseteq B(x,r_1) \subseteq U$$
כיוון ש-$B(x,r) \in \mathcal{B}_R$ מתקיים סעיף (II') של הגדרת הבסיס.
הוכח ש-$\mathcal{B}_R$ בסיס של הטופולוגיה הרגילה ב-M.

ב' יהי $(\mathbb{R}, T_S)$ מרחב סורגנפריי. יהי $r > 0$.

הוכיחו שהאוסף $\mathcal{B}_r = \{[a,b) | b-a \le r\}$ הוא בסיס ל-T_S.

הוכיחה.
כל איבר של $\mathcal{B}_r$ הוא שייך לבסיס קטעים החצי פתוחים של מרחב סורגנפריי הוא פתוח בטופולוגיה T_S (סעיף (I') של הגדרת הבסיס).
אם U קבוצה פתוחה במרחב סורגנפריי ו-$x \in \mathbb{R}$, אז קיים קטע $[a_1,b_1) \subseteq U$ כך ש- $x \in [a_1,b_1)$.

נסמן $b = \min\{b_1, x+r\}$. אזי $x \in [x,b)$ ו- $b - x \le r$.
לכן $[x,b) \in \mathcal{B}_r$ ו- $x \in [x,b) \subseteq [a_1,b_1) \subseteq U$.

כלומר, מתקיים סעיף (II') של הגדרת הבסיס.
הוכח ש-$\mathcal{B}_r$ בסיס של מרחב סורגנפריי, מש"ל.

<u>בעיה 7 (ההסבר היה , אבל הבעיה הועברה לתרגיל בית 7)</u>
א' יהיו X,Y מ"ט, $\mathcal{B}_X$ בסיס לטופולוגיה של X , $\mathcal{B}_Y$ בסיס לטופולוגיה של Y . יהי $a \in X$ ותהי $f: X \to Y$ פונקציה.
<u>הוכיחו</u> ש-f רציפה בנקודה a אם"ם
לכל סביבה $V \in \mathcal{B}_Y$ של הנקודה $f(a)$ קיימת סביבה $U \in \mathcal{B}_X$ של הנקודה a כך ש-$f(U) \subseteq V$.