תרגיל 8 – חדוו"א 1 לביולוגיה חישובית

שאלה 1

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם f, g פונקציות זוגיות אז $f \cdot g$ פונקציה זוגית.

ב. אם f, g פונקציות אי זוגיות אז $f \cdot g$ פונקציה אי זוגית.

ג. אם f, g פונקציות אי זוגיות אז $f - g$ פונקציה אי זוגית.

ד. קיימת פונקציה שהיא גם זוגית וגם אי זוגית.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נכון,

מכיוון ש $f(x)$ ו $g(x)$ הן פונקציות זוגיות אז מתקיים $g(x)=g(-x), f(x)=f(-x)$.

$f(x)g(x)=f(-x)g(-x)$ ולכן $f(x)g(x)$ פונקציה זוגית.

סעיף ב

לא נכון,

דוגמא נגדית. $f(x)=g(x)=x$ f, g פונקציות אי זוגיות אבל $f \cdot g = x^2$ לא פונקציה אי זוגית.

סעיף ג

נכון,

מכיוון ש $f(x)$ ו $g(x)$ הן פונקציות זוגיות אז מתקיים $g(x)=-g(-x), f(x)=-f(-x)$.

$f(x)-g(x)=-f(-x)+g(-x)=-\left(f(-x)-g(-x)\right)$.

סעיף ד

נכון, $f(x)=0$ גם פונקציה זוגית וגם פונקציה אי זוגית.

שאלה 2

חשב את הגבולות הבאים ללא שימוש בכלל לופיטל

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3+10^6x-2}$.

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-\cos x}$.

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

ד. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

ה. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

ו. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

ז. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-x\right)$

ח. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}$

ט. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

י. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

יא. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(2x)}$

פתרון שאלה 2

סעיף א

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3+10^6x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+2x-1}{x^3}}{\frac{2x^3+10^6x-2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{10^6}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{1+0-0}{2+0-0}=\frac{1}{2}.$$

סעיף ב

אם $g(x)$ פונקציה חסומה ו $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ אז $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

לפי המשפט הנ"ל נקבל ש $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\sin x=0$ מכיוון ש $\sin x$ פונקציה חסומה ו $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

באותו אופן $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\cos x=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+\sin x}{x^2}}{\frac{x^2-\cos x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}\cdot\sin x}{1-\frac{1}{x}\cdot\cos x}=1 .$$

<u>סעיף ג</u>

נשתמש בגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

<u>סעיף ד</u>

נשתמש בגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{1/x}=1 .$$

<u>סעיף ה</u>

נשתמש בגבול $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x-1/2}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=e^2 .$$

<u>סעיף ו</u>

נשתמש בגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x-\sin x}{x}}{\frac{x+\sin x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=0$$

<u>סעיף ז</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+7x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+7x}+x\right)}{\sqrt{x^2+7x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-x^2}{\sqrt{x^2+7x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{\sqrt{x^2+7x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+7x}+x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{\frac{x^2+7x}{x^2}}+1}=3.5$$

<u>סעיף ח</u>

נשתמש בגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}=1$$

<u>סעיף ט</u>

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{9+2x}+5}{\sqrt{9+2x}+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+2x-25}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}$$

נשתמש בנוסחאות כפל מקוצר $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9+2x-25}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-16)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\cdot(x-8)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=2.4$$

<u>סעיף י</u>

נשתמש בגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+(-x))}{-x}\right]=2$$

<u>סעיף יא</u>

נשתמש בגבולות $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(e^x-1\right)}{2x\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}$$

<u>שאלה 3</u>

א. נתון כי $\lim_{x\to 1}f(x)=\infty$ וכי לכל $0<x<2$ $\left|f(x)-g(x)\right|<3$. הוכח כי $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

ב. תהיי $f(x)=\begin{cases}ax+2 & x<1\\ 3 & x=1\\ 3x+2a & x>1\end{cases}$ כמו כן קיים $\lim_{x\to 1}f(x)$. מהו a ? מהו הגבול?

ג. מצא a,b כך ש $f\left(x\right)=\begin{cases} ax+b & x<1 \\ 2 & x=1 \\ b\left(x+1\right)^2 & x>1 \end{cases}$ תהייה רציפה בכל $\mathbb{R}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

נשתמש בכלל הסנדביץ

יהיו $f\left(x\right),g\left(x\right),h\left(x\right)$ שלושה פונקציות המוגדרות בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $f\left(x\right)\le g\left(x\right)\le h\left(x\right)$, ונניח כי קיימים הגבולות $A=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0} h\left(x\right)$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=A$.

נשים לב ש $f\left(x\right)-3<g\left(x\right)<f\left(x\right)+3$ עבור $0<x<2$ ז"א קיימת סביבה לנקודה $x=1$ שעבורה מתקיים $\frac{f\left(x\right)+3}{f\left(x\right)}<\frac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}<\frac{f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)}$. מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\infty$ נקבל

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)}=\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{3}{f\left(x\right)}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)+3}{f\left(x\right)}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{3}{f\left(x\right)}\right)=1$$

וממשפט הסנדביץ נקבל $\lim\limits_{x\to 1} g\left(x\right)=1$.

<u>סעיף ב</u>

מכיוון שהגבול $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ קיים נקבל ש $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax+2\right)=a+2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(3x+2a\right)=3+2a$$

$3+2a=a+2\Rightarrow a=-1$.

<u>סעיף ג</u>

כדי שהפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases} ax+b & x<1 \\ 2 & x=1 \\ b\left(x+1\right)^2 & x>1 \end{cases}$ תהייה רציפה צריך להתקיים

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)$.

מכיוון ש $f\left(1\right)=2$ נקבל:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax+b\right)=a+b,\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} b\left(x+1\right)^2=4b$.

יש לפתור את מערכת המשוואות

$\begin{cases} a+b=2 \\ 4b=2 \end{cases}$ ואז $b=\frac{1}{2},a=\frac{3}{2}$.

<u>שאלה 4</u>

א. תהיי f רציפה ב $[0,a]$ וכן $f(0)=f(a)$. הראה כי יש $0\le x\le\frac{a}{2}$ כך ש $f(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)$.

ב. הראה כי למשוואה $x=\tan x$ יש אינסוף פתרונות ב $\mathbb{R}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

<u>משפט ערך הביניים</u>

תהא f רציפה ב $[a,b]$, ונניח ש $f(a)<0, f(b)>0$ (או להפך) אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$.

נגדיר פונקציה $g(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)-f(x)$.

מכיוון ש $f(x)$ פונקציה רציפה נקבל ש $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ רציפה ואז $g(x)$ פונקציה רציפה כהפרש של פונקציות רציפות.

$g(0)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(0), g\left(\frac{a}{2}\right)=f(a)-f\left(\frac{a}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{a}{2}\right)$.

סה"כ קיבלנו ש $g(0)=-g\left(\frac{a}{2}\right)$. אם $g(0)=0$ סיימנו כי אז עבור $x=0$ נקבל את הדרוש.

אם $g(0)<0$ אז $g\left(\frac{a}{2}\right)>0$ וממשפט ערך הביניים נקבל שקיימת נקודה $0<c<\frac{a}{2}$ כך ש $g(c)=0$ ז"א $f\left(c+\frac{a}{2}\right)-f(c)=0\Rightarrow f\left(c+\frac{a}{2}\right)=f(c)$.

אם $g(0)>0$ אז $g\left(\frac{a}{2}\right)<0$ וממשפט ערך הביניים נקבל שקיימת נקודה $0<c<\frac{a}{2}$ כך ש $g(c)=0$ ז"א $f\left(c+\frac{a}{2}\right)-f(c)=0\Rightarrow f\left(c+\frac{a}{2}\right)=f(c)$.

<u>סעיף ב</u>

מספיק להראות שהפונקציה $g(x)=x-\tan x$ חותכת את ציר ה - x אינסוף פעמים.

בקטע הפתוח $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ לכל מספר שלם k נקבל ש $-\frac{\pi}{2}+\pi k\le x\le\frac{\pi}{2}+\pi k$.

מכיוון שלכל k שלם מתקיים $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^+}\tan x=-\infty$ נקבל לכל k $\varepsilon_{k1}>0$ כך ש $\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k+\varepsilon_{k1}\right)<-\frac{\pi}{2}+\pi k<-\frac{\pi}{2}+\pi k+\varepsilon_{k1}$ ולכן $g\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k+\varepsilon_{k1}\right)>0$.

מכיוון שלכל k שלם מתקיים $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^-}\tan x=+\infty$ נקבל לכל k $\varepsilon_{k2}>0$ כך ש

$\frac{\pi}{2}+\pi k-\varepsilon_{k2}<\frac{\pi}{2}+\pi k>\frac{\pi}{2}+\pi k-\varepsilon_{k2}$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\pi k-\varepsilon_{k2}\right)>$ ולכן $g\left(\frac{\pi}{2}+\pi k-\varepsilon_{k2}\right)<0$.

ולכן לכל k שלם קיימת c בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k+\varepsilon_{k1},\frac{\pi}{2}+\pi k-\varepsilon_{k2}\right]$ כך ש $g(c)=0$.

מכיוון שיש אינסוף מספרים שלמים נקבל שיש אינסוף פתרונות למשוואה $x=\tan x$.

<u>שאלה 5</u>

תהיי $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה.

א. הראה כי יש $0\le x_0\le 1$ כך ש $f(x_0)=x_0$.

ב. הראה שאין בהכרח $0\le x_0\le 1$ כך ש $f(x_0)=\frac{x_0}{2}$.

ג. האם סעיף א נכון אם נחליף $[0,1]$ ב $(0,1)$?

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>

נתון ש $f(x)$ רציפה, הפונקציה $y=x$ רציפה ולכן הפונקציה $g(x)=f(x)-x$ רציפה כהפרש של פונקציות רציפות.

אם $f(0)=0$ סיימנו.

אם $f(0)\neq 0$ מכיוון ש $f:[0,1]\to[0,1]$ נקבל ש $f(0)>0$ ואז $g(0)>0$.

אם $f(1)=1$ סיימנו.

אם $f(1)\neq 1$ מכיוון ש $f:[0,1]\to[0,1]$ נקבל ש $f(1)<1$ ואז $g(1)<0$.

ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $0\le x_0\le 1$ $g(x_0)=0\Leftarrow f(x_0)-x_0=0\Leftarrow f(x_0)=x_0$.

<u>סעיף ב</u>

עבור הפונקציה הקבועה $f(x)=1$ לא קיימת נקודה $0\le x_0\le 1$ כך ש $f(x_0)=\frac{x_0}{2}$.

<u>סעיף ג</u>

סעיף א לא נכון אם נחליף $[0,1]$ ב $(0,1)$.

עבור הפונקציה $f(x)=\frac{x}{2}$ לא קיימת נקודה $0<x_0<1$ כך ש $f(x_0)=x_0$.