תרגול 11

מערכת אי הומוגנית ליניארית במקדמים קבועים

משפט

הפתרון הכללי של מערכת דיפרנציאלית ליניארית אי הומוגנית $\underline{x}' = A\underline{x} + b(t)$ הוא סכום של הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה $\underline{x}' = A\underline{x}$ ופתרון פרטי של המערכת האי הומוגנית המתאימה.

הערה

לפי המשפט הנ"ל כדי למצוא פתרון כללי למערכת משוואות אי הומוגנית יש למצוא פתרון כללי למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית ולחבר את התוצאות.

שיטת הניחוש

דוגמא

נתונה מערכת משוואות אי הומוגנית $\begin{cases} y' = y + z + 2e^{-x} \\ z' = 4y + z + 4e^{-x} \end{cases}$.

נמצא תחילה פתרון פרטי בעזרת ניחוש.

מהתרגיל ניתן להסיק שפתרון המערכת הוא מהצורה $\begin{cases} y = \alpha e^{-x} \\ z = \beta e^{-x} \end{cases}$.

נציב את הפתרונות במערכת המשוואות הנתונה ונקבל

$\begin{cases} -\alpha e^{-x} = \alpha e^{-x} + \beta e^{-x} + 2e^{-x} \\ -\beta e^{-x} = 4\alpha e^{-x} + \beta e^{-x} + 4e^{-x} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} -\alpha e^{-x} = (\alpha + \beta + 2)e^{-x} \\ -\beta e^{-x} = (4\alpha + \beta + 4)e^{-x} \end{cases}$. נפתור את מערכת המשוואות

$\begin{cases} -\alpha = \alpha + \beta + 2 \\ -\beta = 4\alpha + \beta + 4 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + 2\beta = -4 \end{cases}$. נשים לב שקיבלנו מערכת משוואות עם אינסוף פתרונות.

מכיוון שמספיק פתרון פרטי אחד נוכל לבחור $\alpha = -2, \beta = 2$ ואז הפתרון הפרטי של המערכת הוא:

$\begin{cases} y = -2e^{-x} \\ z = 2e^{-x} \end{cases}$.

נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 4y + z \end{cases}$. נמצא תחילה את הערכיים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. נחשב $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

נפתור את המשוואה $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ונקבל $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = -1$.

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} -2\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\beta_1 - 2\beta_2 = 0 \end{cases}$ הבסיס של קבוצת הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = 3$.

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -4\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$ הבסיס של קבוצת הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

סה"כ הפתרון הכללי של המערכת הוא $C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

הערה

לא תמיד נוכל למצוא את הפתרון הפרטי בעזרת שיטת הניחוש.

דוגמא

אם היינו מנסים באותה דרך למצוא פתרון פרטי למערכת $\begin{cases} y' = y + z + 2e^{-x} \\ z' = 4y + z + 12e^{-x} \end{cases}$ היינו נתקלים במערכת משוואות ללא פתרון.

משפטווריאציית הפרמטרים

למערכת דיפרנציאלית ליניארית אי הומוגנית עם מקדמים קבועים $\underline{x}' = A + b(t)$ כאשר הרכיבים של $b(t)$ רציפים בקטע פתוח I, יש בקטע זה פתרון שהצגתו: $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\underline{x}^{(i)}(t)$ כאשר $\{\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), \underline{x}^{(3)}(t), ..., \underline{x}^{(n)}(t)\}$ היא משפחת פתרונות בסיסית של המערכת ההומוגנית המתאימה $\underline{x}' = A$ ו $C_1(t), C_2(t), C_3(t)...., C_n(t)$ הן n פונקציות, המתקבלות באמצעות פתרון מערכת משוואות אלגברית ואינטגרציה בלבד $\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\underline{x}^{(i)}(t) = \underline{b}(t)$.

תרגיל

מצא פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית $\begin{cases} y' = y + z + 2e^{-x} \\ z' = 4y + z + 12e^{-x} \end{cases}$.

פתרון

בתרגיל הקודם ראינו שהפתרון למערכת ההומוגנית המתאימה $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 4y + z \end{cases}$ הוא $C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

מהמשפט הקודם נקבל ש $C'_1(x)\underline{x}^{(1)}(x) + C'_2\,\underline{x}^{(2)}(x) = \underline{b}(x)$.

בתרגיל שלנו $\underline{x}^{(1)}(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x}^{(2)}(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b}(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

עלינו לפתור את המשוואה $C'_1(x)e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C'_2(x)e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

יש לפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} e^{-x}C_1' + e^{3x}C_2' = 2e^{-x} \\ -2e^{-x}C_1' + 2e^{3x}C_2' = 12e^{-x} \end{cases}$.

נכפיל את המשוואה הראשונה פי שתיים ונחבר עם המשוואה השנייה.

סה"כ נקבל $4e^{3x}C_2' = 16e^{-x} \Leftarrow C_2' = 4e^{-4x} \Leftarrow C_2 = -e^{-4x}$.

נציב $C_2' = 4e^{-4x}$ במשוואה השנייה ונקבל $-2e^{-x}C_1' + 2e^{3x} \cdot 4e^{-4x} = 12e^{-x}$

נפתור את המשוואה $-2e^{-x}C_1' + 8e^{-x} = 12e^{-x} \Rightarrow -2e^{-x}C_1' = 4e^{-x} \Rightarrow C_1' = -2 \Rightarrow C_1 = -2x$

נציב את הערכים שקיבלנו ב $C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ונקבל

$-2xe^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + -e^{-4x} \cdot e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} -2x-1 \\ 4x-2 \end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} -2x-1 \\ 4x-2 \end{pmatrix}$.

הגדרה

תהיי נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} y_1'=\sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l + b_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n'=\sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l + b_n(t) \end{cases}$ כאשר $b_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ הם פונקציות נתונות בקטע פתוח I. בעיית ערך התחלתי ליניארית היא מערכת המשוואות הנ"ל יחד עם n תנאי ההתחלה:

$\begin{cases} y_1'(t_0)=x_1^0 \\ . \\ . \\ . \\ y_n'(t_0)=x_n^0 \end{cases}$ כאשר t^0 נקודה נתונה בקטע I, ו $x_1^0,...,x_n^0$ הם n מספרים נתונים.

תרגיל

מצא פתרון למערכת $\begin{cases} y_1'=y_1+y_2 \\ y_2'=4y_1+y_2 \end{cases}$ עם תנאי ההתחלה $\begin{cases} y_1(0)=5 \\ y_2(0)=-2 \end{cases}$.

פתרון

ראינו שהפתרון הכללי של המערכת הנ"ל הוא $C_1e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2e^{3x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

על פי הנתון $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} C_1+C_2=5 \\ -2C_1+2C_2=-2 \end{cases}$

ונקבל $C_1=3, C_2=2$ והפתרון הוא $e^{3x}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+e^{-x}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}=2e^{3x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

מעבר ממשוואה ליניארית מסדר n למערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון

כל משוואה ליניארית מסדר n ניתנת להצגה כמערכת של n משוואות ליניאריות על ידי המעבר הבא:

אם $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=g(x)$.

$$\begin{aligned} &y=y_1 \\ &y_1'=y_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &y_{n-1}'=y_n \\ &y_n'=-a_{n-1}y_n-...-a_1y_2-a_0y_1+g(x) \end{aligned}$$

באופן הזה מתקבלת מערכת משוואות ליניאריות שפתרונה שקול לפתרון המשוואה המקורית.

<u>דוגמא</u>

המשוואה $y^{(3)}+2y''-5y'+2y=x$ שקולה למערכת המשוואות

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -2y_3+5y_2-2y_1+x \end{aligned}$$

הפתרון של y_1 עבור מערכת המשוואות הוא הפתרון של המשוואה $y^{(3)}+2y''-5y'+2y=x$.