משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 6

תרגיל: מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

א.

$$\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{d^2u}{dt^2}-2u=0$$

פתרון: משוואה אופיינית: $\lambda^3+\lambda^2-2=0$. ניתן לראות כי $\lambda_1=1$ שורש.

כעת נבצע חלוקת פולינומים.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^2+2\lambda+2 & \\ \hline \lambda^3+\lambda^2-2 & \lambda-1 \\ -\;\lambda^3-\lambda^2 & \\ =2\lambda^2-2 & \\ -\;2\lambda^2-2\lambda & \\ =2(\lambda-1) & \end{array} \Longrightarrow$$

$$(\lambda^2+2\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

והפתרון הכללי:

$$\boxed{u(t)=c_1e^t+e^{-t}(c_2\cos t+c_3\sin t)}$$

ב.

$$y''''+y'''+y''=0$$

פתרון: מ. אופיינית:

$$\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2=0$$

$$\lambda^2(\lambda^2+\lambda+1)=0$$

$\lambda_{1,2}=0$ בריבוי 2

$$\lambda_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

והפתרון הכללי:

$$\boxed{y(x)=c_1+c_2x+e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]}$$

ג.

$$\frac{d^5u}{dr^5}+5\frac{d^4u}{dr^4}-2\frac{d^3u}{dr^3}-10\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}+5u=0$$

מ. אופיינית: $\lambda^5+5\lambda^4-2\lambda^3-10\lambda^2+\lambda+5=0$, $\lambda=1$ שורש.

ע"י ח.פולינומים נקבל

$$(\lambda-1)(\lambda^4+6\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda-5)=0$$

מחלקים שוב ב $\lambda=1$ ובסוף מגיעים ל

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2(\lambda+5)=0$$

והפתרון הכללי:

$$\boxed{u(r)=c_1e^r+c_2re^r+c_3e^{-r}+c_4re^{-r}+c_5e^{-5r}}$$

שאלה ממבחן: תשע"ב סמס א' מועד ב' (פרופ' גרמי שיף)

שאלה 5

א. יהי $y = xe^x + e^x\cos 2x + 3x$. מצאו אופרטור דיפרנציאלי מספר שישי, L, המקיים $Ly=0$.

ב. אם y מקיימת $y''-2y'+5y = xe^x + e^x\cos 2x + 3x$, מצאו משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מספר שמיני עם מקדמים קבועים ש-y פותרת אותה.

פתרון: **א.** לאיפוס $\underbrace{x}_{\text{מעיד על ריבוי 2}}\underbrace{e^x}_{\lambda=1}$ נשתמש באופרטור $(D-1)^2$

לאפס $e^x\cos 2x$ נשתמש באופרטור $(D-(1+2i))(D-(1-2i))$

$$= D^2-2D+5$$

לאיפוס $3x$ נשתמש ב-D^2.

הערה: לאיפוס סכום של פונ' אשר לכל אחת אופרטור משמיד משלה נשתמש במכפלת האופרטורים, כ"א

$(D-1)^2(D^2-2D+5)D^2 = \cdots$ ולאחר כפל נקבל

$$\boxed{L = D^6-4D^5+10D^4-12D^3+5D^2}$$

L אופרטור מספר 6 המקיים $Ly=0$.

ב. נרשום את המד"ר בצורה של אופרטורים:

$$(D^2-2D+5)y = xe^x+e^x\cos 2x+3x$$

נשתמש באופרטור שמצאנו בסעיף א' לקבל:

$$(D^6-4D^5+10D^4-12D^3+5D^2)(D^2-2D+5)y=0$$

ולאחר כפל נקבל:

$$(D^8-6D^7+23D^6-52D^5+79D^4-70D^3+25D^2)y=0$$

והמד"ר ההומוגני מספר 8, עם מקדמים קבועים, ש-y פותרת אותה תהיה:

$$\boxed{y^{(8)}-6y^{(7)}+23y^{(6)}-52y^{(5)}+79y^{(4)}-70y^{(3)}+25y''=0}$$

שאלה ממבחן: (תשע"ו מועד ב' פ.ג. של)

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y''''' - 3y''' - 4y' = 0$

ב. מצא משוואה דיפרנציאלית עם מקדמים ממשיים קבועים שיש לה פתרון $(x^2+1)e^{2x}\cos 4x$ וכתוב את הפתרון הכללי של המשוואה שמצאת

פתרון: א. מ. אופייני –

$$\lambda(\lambda^4-3\lambda^2-4)=0 \Leftarrow \lambda^5-3\lambda^3-4\lambda=0$$

$\boxed{\lambda_1=0}$, נסמן $\mu^2-3\mu-4=0 \Leftarrow \lambda^2=\mu$

$$\Rightarrow \mu_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}= \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\lambda_{4,5}=\sqrt{-1}=\pm i} \quad , \quad \boxed{\lambda_{2,3}=\sqrt{4}=\pm 2} \Leftarrow$$

והפתרון הכללי:

$$\boxed{y(x)=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4\cos x+C_5\sin x}$$

ב. נרצה לקבל את $(x^2+1)e^{2x}\cos 4x$ ולכן נרצה שלשורשים $2\pm4i$ יהיה ריבוי מספר 3.

$$\left[(D-(2+4i))(D-(2-4i))\right]^3=(D^2-4D+20)^3=$$

$$=D^6-12D^5+108D^4-554D^3+2160D^2-4800D+8000$$

והמשוואה תהיה

$$\boxed{y^{(6)}-12y^{(5)}+108y^{(4)}-554y^{(3)}+2160y''-4800y'+8000=0}$$

והפתרון הכללי שלה יהיה:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x)=\;&C_1e^{2x}\cos 4x+C_2e^{2x}\sin 4x+C_3xe^{2x}\cos 4x+C_4xe^{2x}\sin 4x+\\ &+C_5x^2e^{2x}\cos 4x+C_6x^2e^{2x}\sin 4x \end{aligned}}$$

תרגיל:

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\ddot{y}+\omega_0^2 y=\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0>0$

ב. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $\ddot{y}+\omega_0^2 y=\cos(\omega t)$

$\omega_0>0$, $\omega>0$ וגם $\omega_0\neq\omega$

ג. הוכח שניתן לקבל את התשובה של סעיף א' ע"י חישוב הגבול $\omega\to\omega_0$ לתשובה מסעיף ב'.

פתרון א. המשוואה היא $(D^2+\omega_0^2)y=\cos(\omega_0 t)$ ובעזרת המשמיד נקבל:

$$(D^2+\omega_0^2)^2 y=0$$

מ. אופייני $(\lambda^2+\omega_0^2)^2=0 \Leftarrow \lambda_{1,2}=\pm\omega_0 i$ בריבוי 2

ולכן

$$y(t)=C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\sin(\omega_0 t)+\underbrace{C_3 t\cos(\omega_0 t)+C_4 t\sin(\omega_0 t)}$$

כאן $C_{3,4}$ הינם מהמשמיד ולכן יש למצוא אותם, נסמן:

$$\begin{cases} y_p=C_3 t\cos(\omega_0 t)+C_4 t\sin(\omega_0 t) \\ \dot{y}_p=C_3\cos(\omega_0 t)-C_3 t\omega_0\sin(\omega_0 t)+C_4\sin(\omega_0 t)+C_4 t\omega_0\cos(\omega_0 t) \\ \ddot{y}_p=-C_3\omega_0\sin(\omega_0 t)-C_3\omega_0\sin(\omega_0 t)-C_3 t\omega_0^2\cos(\omega_0 t)+C_4\omega_0\cos(\omega_0 t) \\ \quad +C_4\omega_0\cos(\omega_0 t)-C_4 t\omega_0^2\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

נציב הכל במשו' המקורית:

$$-2C_3\omega_0\sin(\omega_0 t)+2C_4\omega_0\cos(\omega_0 t)-\cancel{C_3 t\omega_0^2\cos(\omega_0 t)}-\cancel{C_4 t\omega_0^2\sin(\omega_0 t)}$$
$$+\cancel{C_3 t\omega_0^2\cos(\omega_0 t)}+\cancel{C_4 t\omega_0^2\sin(\omega_0 t)}=\cos(\omega_0 t)$$

נשווה מקדמים של $\cos(\omega_0 t)$ ו- $\sin(\omega_0 t)$ בשני האגפים:

$$\begin{cases} -2\omega_0 C_3=0 \Rightarrow \\ 2\omega_0 C_4=1 \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{matrix} C_3=0 \\ C_4=\frac{1}{2\omega_0} \end{matrix}}$$

והפתרון הכללי:

$$\boxed{y(t)=C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\sin(\omega_0 t)+\frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}}$$

3 מ3

ב. המשוואה
$$(D^2+\omega_0^2)y=\cos(\omega t)$$

מפעיל המשמיד
$$(D^2+\omega_0^2)(D^2+\omega^2)y=0$$

מ. אופיינית
$$(\lambda^2+\omega_0^2)(\lambda^2+\omega^2)=0$$

ונקבל
$$\lambda_{1,2}=\pm\omega_0 i \qquad \lambda_{3,4}=\pm\omega i$$

$$y(t)=C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\sin(\omega_0 t)+\underbrace{C_3\cos(\omega t)+C_4\sin(\omega t)}$$

את $C_{3,4}$ יש למצוא.

$$\begin{cases} y_p=C_3\cos\omega t+C_4\sin\omega t \\ y_p'=-C_3\omega\sin\omega t+C_4\omega\cos\omega t \\ y_p''=-C_3\omega^2\cos\omega t-C_4\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

נציב במד"ר המקורי:
$$-C_3\omega^2\cos\omega t-C_4\omega^2\sin\omega t+C_3\omega_0^2\cos\omega t+C_4\omega_0^2\sin\omega t=\cos\omega t$$

נשווה מקדמים
$$\begin{cases} -C_3\omega^2+C_3\omega_0^2=1 \Rightarrow C_3=\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \\ -C_4\omega^2+C_4\omega_0^2=0 \Rightarrow C_4=0 \end{cases}$$

והפתרון הכללי
$$\boxed{y(t)=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+\frac{\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

ג. לא ניתן להשאיף מיד את $\omega\to\omega_0$ ולכן נסדר את הפתרון לאחר משחק עם הקבועים.

$$y(0)=C_1+\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \Rightarrow C_1=y(0)-\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$$

באותה צורה ניתן לקבל את C_2 ע"י
$$C_2=\frac{y'(0)}{\omega_0}$$

אם כן הפתרון מסעיף ב' מקבל כעת את הצורה:
$$y(t)=\left(y(0)-\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\cos\omega_0 t+\frac{y'(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t+\frac{\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$$

6'3

$$y_3(t) = y(0)\cos\omega_0 t + \frac{y'(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

כעת נלך לגבול $\omega \to \omega_0$ ב-y ונקבל:

$$\lim_{\omega\to\omega_0} y_3(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)}{\frac{d}{d\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

✓ לפי כלל לופיטל

$$= A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{-t\sin\omega t}{-2\omega} =$$

$$= A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0} = y_k(t)$$