

מבחן דמה – חדו"א 1 למורים

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x \ln(1+2x)) \cdot \cos(x+1)}{\sin(x)}$  ב.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \ln(x)$  ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{2^{n^2}}$

2. תהי סדרה חיובית  $a_n$  ויהי קבוע  $d \in \mathbb{R}$   $2 < d$  כך שלכל  $n$  מתקיים  $d \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$ .

כמו כן, נתון כי  $a_1 < a_2$ .

א. הוכיחו כי  $a_n$  מונוטונית עולה.

ב. חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

3. תהיינה  $g, h$  גזרות ב  $x=0$ , ונביט בפונקציה  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ h(x) & x < 0 \end{cases}$ .

א. הוכיחו/הפריכו:  $f$  רציפה ב  $x=0$  אם ורק אם  $h(0) = g(0)$ .

ב. הוכיחו/הפריכו:  $f$  גזירה ב  $x=0$  אם ורק אם  $h'(0) = g'(0)$ .

4.

א. הוכיחו כי לפונקציה  $f(x) = e^{-x} + e^x$  יש מינימום גלובאלי, ומצאו אותו.

ב. הוכיחו כי לכל  $a \in \mathbb{R}$  למשוואה  $e^x - e^{-x} = a$  קיים פתרון יחיד.

5.

א. תהיינה שתי פונקציות  $f, g$  הגזרות בקטע  $A$ , כך ש  $f'(x) = g'(x) \forall x \in A$ .

כמו כן, נתון כי קיימת נק'  $a \in A$  עבורה  $f(a) = g(a)$ .

הוכיחו כי  $f(x) = g(x) \forall x \in A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

תזכורת:  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .