בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ,מועד א'

מרצים: מר אחיה בר-און, גברת תמר בר-און, מר בארי גרינפלד, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, עוזי חרוש, עומר נטר, גלעד פורת-קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.

אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. נגדיר שתי פרידקטים: $P(k)$ המביע כי k זוגי ו $S(k,m)$ המביע כי $k+m$ מתחלק ב 3 ללא שארית (משתני הפרדיקטים נלקחים מהטבעיים. הערה: 0 אינו טבעי).

(א) מצאו קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}$ כך ש $\{3,5,9\}\subseteq A$ שעבורה הפסוק

$$\forall k\in A:\ (P(k)\vee(\exists m\in A:\ k<m))$$

בעל ערך אמת True. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

(ב) מצאו קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}$ כך ש $\{4,5,9\}\subseteq A$ שעבורה הפסוק

$$\exists k\in A\forall m\in A:\ (S(k,m)\vee P(m))$$

בעל ערך אמת True. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

(ג) תהיינה שתי קבוצות A,C עבורן נתון כי

$$A=\{4,6,7,8,13\}$$
$$C\subseteq\{2,3,5\}$$

מצאו קבוצה B עבורה מתקיים בהכרח $C\subseteq A\triangle B$. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

(ד) תהיינה שתי קבוצות

$$A=\{6,7,8,9,10\}$$
$$B=\{2,4,5,7,8\}$$

מצאו קבוצה X עבורה מתקיים $X\in P(A\cup B)$ אך $X\notin P(A)\cup P(B)$ (כאשר $P(*)$ הוא סימון שקבוצה החזקה של $*$). אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

2. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n)$ הוא כמות המספרים (הטבעיים) המחלקים את n. במפורש
$$f(n)=|\{k\in\mathbb{N}\mid \exists a\in\mathbb{N}:\ n=ka\}|$$
(הערה 0 אינו טבעי). תהא
$$A=\{5,6,8,9,12,15,18,24,30,121\}$$
ונגדיר על A יחס סדר R על ידי הכלל: aRb אמ"מ
$$(f(a)<f(b))\vee(a=b)$$
(הערה: אין צורך להוכיח כי זהו יחס סדר).
(א) חשבו את $f(24)$
(ב) מצאו את קבוצת כל האיברים המקסמאליים ב A.
(ג) מצאו את קבוצת כל האיברים המינימאליים ב A.
(ד) מצאו את קבוצת כל האיברים הגדולים ביותר ב A.
(ה) מצאו את קבוצת כל האיברים הקטנים ביותר ב A.

3. תהא $A=\{1,\ldots,10\}$ קבוצת המספרים הטבעיים בין 1 ל 10 (כולל 1 וכולל 10). נגדיר יחס R על A להיות
$$R=\{(8,8),(9,8),(7,1),(4,7)\}$$
ונגדיר S להיות קבוצת כל יחסי השקילות על A שמכילים את R ונסמן $T=\cap_{X\in S}X$.
(א) הוכיחו/הפריכו: T יחס שקילות. במידה והוא יחס שקילות, מצאו את מחלקת השקילות $[9]_T$. במידה וTאינו יחס שקילות, הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).
(ב) מצאו איבר מינימאלי ביחס ההכלה בקבוצה $S\setminus\{T\}$ (כלומר בקס"ח $(S\setminus\{T\},\subseteq)$). כתבו כמה מחלקות שקילות יש בקבוצת המנה A/U.

4. נגדיר פונקציה $f:P(P(\mathbb{N}))\to P(\mathbb{N})$ ע"י הכלל $f(S)=\cap_{X\in S}X$ (הערה: הסימון $P(*)$ הוא סימון שקבוצה החזקה של $*$).
(א) תהי $A=\{1,2,8,9\}$. מצאו X_1,X_2 כך ש $f(X_1)=f(X_2)=A$ וגם $X_1\cap X_2=\emptyset$. אם לא קיימים X_1,X_2 כאלה, הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).
(ב) מצאו כמה מקורות שונים יש לקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{2\}$ (ב XI ישנה אפשרות הזנת תשובה גם עבור אינסוף).

חלק ב

5. תהא A קבוצה, נגדיר פונקציה $f:P(P(A))\times P(P(A))\to P(P(A))$ ע"י הכלל
$$f(X,Y)=\{C\triangle D\mid C\in X\wedge D\in Y\}$$
(א) הוכיחו כי לכל $X\subseteq P(A)$ מתקיים כי $|f(X,X)|\geq|X|$
(ב) הוכיחו כי לכל $X\subseteq P(A)$ שאינה סופית מתקיים כי $|f(X,X)|=|X|$

6. לכל n טבעי נגדיר יחס שקילות R_n על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י הכלל: $(f,g)\in R_n$ אמ"מ $f^{-1}[\{n\}]=g^{-1}[\{n\}]$ (אין צורך להוכיח שאלו יחסי שקילות).
(א) נקבע $n=1$. תהא $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מצאו את עוצמת מחלקת שקילות. כלומר מצאו את $|[f]_{R_1}|$(חלקו למקרים)
(ב) נקבע $n=1$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1|$.
(ג) תהי $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. הוכיחו: מתקיים $\cap_{n\in\mathbb{N}}[f]_{R_n}=\{f\}$.
(ד) הוכיחו/הפריכו: קיימת f כך שלכל n טבעי מתקיים $\cap_{k=1}^{n}[f]_{R_k}\neq\{f\}$
(ה) תהינה $f,g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך שלכל $2\leq n$ טבעי מתקיים כי $(f,g)\in R_n$. הוכיחו/הפריכו: $f=g$

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").
במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").