התכנסות במ"ש של סדרות פונקציות

• האם $f_n(x) = x^n$ מתכנסת במ"ש ב $(0,1)$?

יהי $0<x_0<1$

$$f(x)= \lim_{n\to\infty} x_0^n = 0$$

$$d_n = \sup_{(0,1)} |f(x) - f_n(x)| = \sup x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

לכן אין התכנסות במ"ש בקטע.

• האם יש התכנסות במ"ש ב $(0,a)$ כש $0<a<1$?

$$d_n = \sup_{(0,a)} x^n = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן יש התכנסות במ"ש בקטע.

• האם $f_n(x)= \frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במ"ש לכל $x\in\mathbb{R}$?

יהי $x_0\in\mathbb{R}$.

$$f(x)= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_0^2+n} = 0$$

$$d_n= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x^2+n} - 0 \right| = \sup \frac{1}{x^2+n} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן מסנדוויץ' גם ה sup שואף ל0 ויש התכנסות במ"ש.

• האם $f_n(x)= \frac{\sin(nx)}{1+x^2+n^2}$ מתכנסת במ"ש לכל $x\in\mathbb{R}$?

יהי $x_0\in\mathbb{R}$.

$$f(x)= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx_0)}{1+x_0^2+n^2} = 0$$

$$d_n= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{1+x^2+n^2} \right| < \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן לפי סנדוויץ' יש התכנסות במ"ש.

בס"ד

• האם $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ מתכנסת במ"ש ב $[0,1]$?

יהי $x_0\in[0,1]$.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx_0}=\begin{cases}1 & x_0=0\\ 0 & x_0>0\end{cases}$$

אין התכנסות במ"ש מכיוון שכל הפונקציות בסדרה רציפות ופונקציית הגבול אינה רציפה (לפי משפט).

• האם $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ מתכנסת במ"ש ? $[0.5,5]$?

יהי $x_0\in[0.5,5]$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0^n}{1+x_0^n}=\begin{cases}0 & x_0<1\\ \frac{1}{2} & x_0=1\\ 1 & 1<x_0\end{cases}$$

אין התכנסות במ"ש מכיוון שהפונקציות בסדרה רציפות בעוד שפונ' הגבול אינה רציפה.

•• האם $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$ מתכנסת במ"ש ? $[0,\infty)$?

יהי $x_0\in[0,\infty)$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_0}{e^{n^2\cdot x_0^2}}=0$$

$$d_n=\sup_{[0,\infty)}\left|\frac{nx}{e^{n^2x^2}}\right|$$

לכל n ניקח $x_n=\frac{1}{n}$ ואז:

$$\frac{nx_n}{e^{n^2x_n^2}}=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{e^{n^2\cdot(\frac{1}{n})^2}}=\frac{1}{e}$$

אם כן $\sup\left|\frac{nx}{e^{n^2x^2}}\right|\geq\frac{1}{e}\underset{n\to\infty}{\not\to}0$ ולכן אין התכנסות במ"ש.

בס״ד

האם $f_n(x)=\arctan(nx)$ מתכנסת במ"ש ב $(0,\infty)$?

יהי $x_0\in(0,\infty)$.

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\arctan(nx_0)=\frac{\pi}{2}$ $\leftarrow$ לכל $x>0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} xn=\infty$

$d_n=\sup_{(0,\infty)}|f(x)-f_n(x)|=\sup|\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)|$

לכל n נבחר $x_n=\frac{1}{n+1}$ ונקבל $n\cdot x<1$. ולכן:

$\arctan(nx_n)<\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

לכן:

$\sup|\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)|\geq\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{n}{n+1})\geq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

לכן אין התכנסות במ"ש.

עוד הסבר: $\arctan(x)$ היא פונקציה עולה ולכן הערך הקטן ביותר יתקבל בצד שמאל (כש $x\to0$). ומכיוון ש $\lim_{x\to0}\arctan(x)=0$

נקבל:

$d_n=\sup|\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)|=\frac{\pi}{2}\underset{n\to\infty}{\not\to}0$.

בס״ד

••

האם $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ מתכנסת במ״ש בכל $\mathbb{R}$?

יהי $x_0\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_0^2+\frac{1}{n}}=\sqrt{x_0^2}$$

$$d_n=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\right|=\sup\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}}\right|=$$

$$=\sup\frac{1}{n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}\right)}\le\frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן לפי סנדוויץ' יש התכנסות במ״ש

•••

האם $f_n(x)=n(1-x)x^n$ מתכנסת במ״ש ? $[0,1]$?

יהי $x_0\in[0,1]$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n\cdot(1-x_0)x_0^n=0$$

$$d_n=\sup_{[0,1]}n(1-x)x^n$$

$$\left(n(1-x)x^n\right)'=n\left(-x^n+nx^{n-1}-nx^n\right)=nx^{n-1}(n-nx-x)=0$$

$$n=nx+x\Rightarrow n=x(n+1)\Rightarrow x=\frac{n}{n+1}$$

בקצוות מקבל 0 ולכן!

$$d_n=\sup_{[0,1]}n(1-x)x^n=n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e}\neq 0$$

לכן אין התכנסות במ״ש.

בס"ד

•••

האם $\underline{f_n(x)} = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1-\frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1-\frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ מתכנסת במ"ש ב- $\underline{[0,1]}$?

יהי $x_0 \in [0,1]$

<u>הסבר:</u> כי מסדר-n כל האינדקסים נמצאים בתחום שמקבל את הערך 0 חוץ מ- $x=1$ שתמיד יקבל 1. $\longleftarrow$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x_0 < 1 \\ 1 & x_0 = 1 \end{cases}$

לכל n ניקח $x_n = 1 - \frac{1}{2 \cdot n}$ ואז:

$$d_n = \sup_{1-\frac{1}{n} \le x \le 1} |n(x-1)+1| \underset{\text{הצבת } x = 1-\frac{1}{2n}}{\geq} \left|n \cdot \left(1-\frac{1}{2n}-1\right)+1\right| =$$

$$= \left|-\frac{n}{2n}+1\right| = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

••

האם $\underline{f_n(x)} = \begin{cases} 1 & n \le x \le n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ מתכנסת במ"ש $\underline{\text{בכל } \mathbb{R}}$?

<u>הסבר:</u> לכל x שניקח נבחר n מספיק גדול וממנו והלאה אותו ה- x יקבל רק 0. $\longleftarrow$ $f(x) = 0$

לכל n ניקח $x_n = \frac{2n+1}{2}$ ואז

$$d_n = \sup_{n \le x \le n+1} |f_n(x) - f(x)| = |1-0| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$ ולכן אין התכנסות במ"ש.

<u>הסבר:</u> לכל n לקחנו $x \in [n, n+1]$ ולכן הערך שהתקבל אצלו הוא 1.