17.12.23

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד ג' – תשפ"ג

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+ay=a-3 \\ x+a^2y=a^2-2a-1 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & | & a-3 \\ 1 & a^2 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & | & a-3 \\ 0 & a^2-a & | & a^2-3a+2 \end{pmatrix}$$

אם $a^2-a\neq 0$ המטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, כל המשתנים תלויים ולכן פתרון יחיד

נציב את הערכים הבעייתיים:

נציב $a=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרון

נציב $a=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

סה"כ:

$a=1$ אינסוף פתרונות

$a=0$ אין פתרונות

$a\neq 0,1$ פתרון יחיד

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a=1$.

כבר דירגנו את המטריצה (קנונית) במקרה זה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $y=t$

ונקבל

$$x=-2-t$$

סה"כ הפתרון הכללי הוא

$$(-2-t,t)=(-2,0)+t(-1,1)$$

ג. נניח כעת כי מערכת המשוואות הנתונה היא עם שלושה נעלמים x,y,z (המקדם של z בכל משוואה הוא אפס).
מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

בעצם המטריצה המקורית משתנה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a-3 \\ 1 & a^2 & 0 & a^2-2a-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a-3 \\ 0 & a^2-a & 0 & a^2-3a+2 \end{array}\right)$$

אם $a^2-a\neq 0$ המערכת מדורגת, ללא שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

אם $a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרון

אם $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המערכת מדורגת, אין שורת סתירה, יש משתנים חופשיים, ולכן אינסוף פתרונות.

סה"כ אם $a\neq 0$ יש אינסוף פתרונות, ואם $a=0$ אין פתרון.

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ המקיימת $T(1,0)=T(0,1)$.

א. חשבו את $T(1,-1)$.

$$T(1,-1)=T\big((1,0)-(0,1)\big)=T(1,0)-T(0,1)=\vec{0}=(0,0)$$

ב. הראו כי $[T]$ <u>אינה</u> הפיכה.

נסמן $T(1,0)=(a,b)$ ולכן $T(0,1)=(a,b)$

ולכן

$$[T] = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

$$\det([T]) = ab - ab = 0$$

ואכן המטריצה אינה הפיכה.

נתון בנוסף כי $T(1,1) = (2,4)$

ג. חשבו את $T(2,-3)$.

סימנו כי

$$T(1,0) = T(0,1) = (a,b)$$

$$T(1,1) = T\big((1,0) + (0,1)\big) = T(1,0) + T(0,1) = (2a,2b)$$

מהנתון

$$(2a,2b) = (2,4)$$

ולכן

$$(a,b) = (1,2)$$

ולכן

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T(2,-3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1,-2)$$

ד. חשבו את $T(T(x,y))$.

$$[T]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T\big(T(x,y)\big) = [T]^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3y \\ 6x+6y \end{pmatrix} = (3x+3y, 6x+6y)$$

<u>שאלה 3</u> נביט בפונקציה $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^3$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x,y)$ בנקודה $(1,1)$.

$$f(1,1) = 1$$

$$f_x = 2x - 2y$$

$$f_y = -2x + 6y^2$$

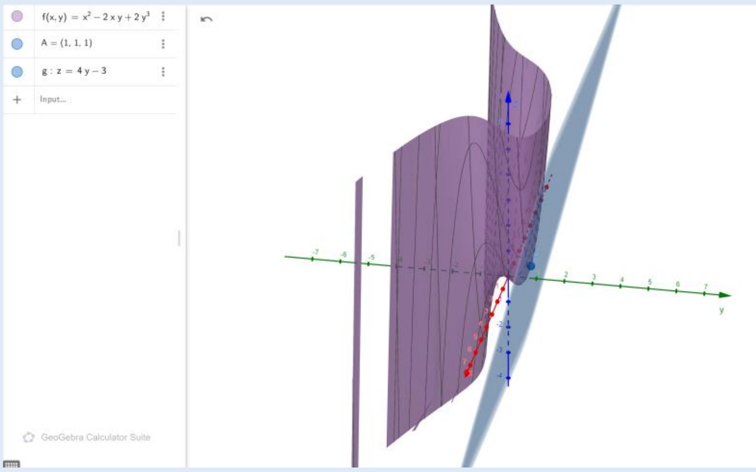
$$f_x(1,1) = 0$$

$$f_y(1,1) = 4$$

משוואת המישור המשיק הינה

$$z - 1 = 0 \cdot (x - 1) + 4(y - 1)$$

$$z = 4y - 3$$



ב. מצאו את כיוון העלייה הגדולה ביותר בנקודה $(1,1)$ (הכיוון בו הנגזרת הכיוונית מקסימלית).

ג. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)$ (מינימום מקומי, מקסימום מקומי, או אוכף).

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. כאשר $f(x,y) = xe^{xy}$ והתחום הוא $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

הרצפה מלבנית ולכן אפשר לבחור סדר אינטגרציה כרצוננו

נשים לב כי

$$\int xe^{xy}dy = \frac{xe^{xy}}{x} = e^{xy}$$

$$\int xe^{xy}dx = \{\text{אינטגרציה בחלקים}\} = \text{למי יש כוח}$$

נלך על סדר האינטגרציה בו y פנימי

$$\iint_D f = \int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{xy}dy\right)dx = \int_0^1 [e^{xy}]_0^1 dx = \int_0^1 (e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^1 = e - 1 - (1 - 0) = e - 2$$

ב. כאשר $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ והתחום הוא $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

הרצפה היא חצי מעגל כדאי לעבור לקואורדינטות קוטביות

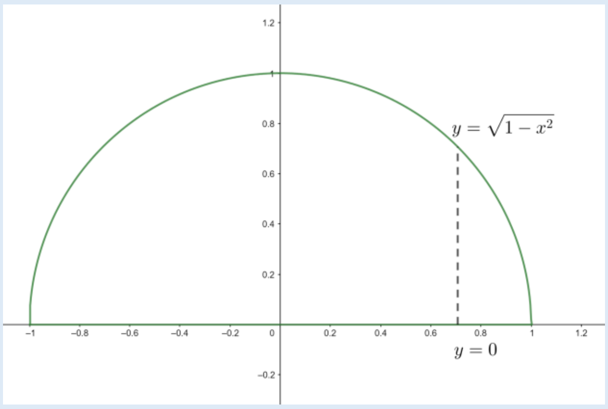
$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi r \cdot rd\theta\right)dr = \int_0^1 r^2 \left(\int_0^\pi d\theta\right)dr = \pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

תוספת לא נחוצה

נרצה לוודא את נכונות הפתרון באמצעות הוולפראם

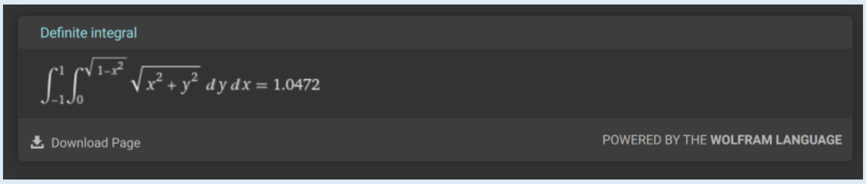
נכתוב את התחום בצורה סטנדרטית

$$D = \left\{(x,y) \middle| -1 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$



ולכן

$$\iint_D f = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

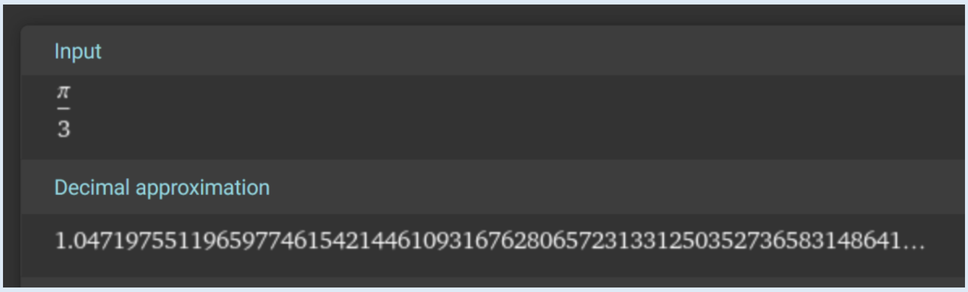

Definite integral

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx = 1.0472$$

Download Page

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

ואכן


Input

$$\frac{\pi}{3}$$

Decimal approximation

1.0471975511965977461542144610931676280657231331250352736583148641…

ג. כאשר $f(x,y) = e^{2y}\cos(xe^y)$ והתחום הוא $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \ln(2)\}$.

תחום הרצפה שוב מלבני, וגם הפונקציה מלחיצה, כדאי לחשוב היטב על סדר האינטגרציה.

נדמה שהאינטגרל לפי x פשוט יותר

$$\int_0^1 e^{2y}\cos(xe^y)\,dx = e^{2y}\int_0^1 \cos(xe^y)\,dx = e^{2y}\left[\frac{\sin(xe^y)}{e^y}\right]_0^1 = \frac{e^{2y}}{e^y}[\sin(e^y) - 0] = e^y\sin(e^y)$$

כעת

$$\iint_D f = \int_0^{\ln(2)} \int_0^1 f\,dx\,dy = \int_0^{\ln(2)} e^y \sin(e^y)\,dy = \begin{Bmatrix} t = e^y \\ dt = e^y dy \end{Bmatrix} = \int_1^2 \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_1^2$$

$$= -\cos(2) + \cos(1)$$