תרגיל בית 1 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. בדקו האם הפולינומים הבאים אי פריקים:

א. $3x^2 - 7x - 5$ ב-$\mathbb{Q}[x]$ (גם בלי נוסחת השורשים).

ב. $x^3 - 7x + 2$ ב-$\mathbb{Q}[x]$.

ג. $x^3 - 7x + 2$ ב-$\mathbb{Z}_5[x]$.

ד. $x^3 - 6x - 9$ ב-$\mathbb{Q}[x]$.

ה. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ ב-$\mathbb{Q}[x]$.

שאלה 2. מצאו את הפירוק של הפולינום $x^4 - 2$ מעל השדות הבאים:

א. $\mathbb{C}$

ב. $\mathbb{R}$

ג. $\mathbb{Q}$

ד. $\mathbb{Z}_3$

שאלה 3. יהי $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים. נניח כי a_n, $f(0)$ ו-$f(1)$ הם אי זוגיים. הוכיחו כי ל-f אין שורשים ב-$\mathbb{Q}$. רמז: טענה מהתרגול.

שאלה 4. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה $n \geq 1$.

א. הוכיחו כי $F[x]/\langle f(x)\rangle$ הוא מרחב וקטורי מעל F עם בסיס $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{n-1}\right\}$.

ב. הציגו את

$$x^4 - x^3 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]/\left\langle x^3 - x^2 - 1\right\rangle$$

כצירוף לינארי של אברי הבסיס $\left\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x}^2\right\}$.

שאלה 5 (חזרה לשיטת הרדוקציה למי ששכח). יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ויהי p מספר ראשוני. נסמן ב-$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ את הומומורפיזם ההטלה. אפשר להרחיב את φ לפונקציה

$$\psi\colon \mathbb{Z}[x] \to \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)[x]$$

שפשוט "עושה מודולו" לכל מקדם של הפולינום, והיא עדיין הומומורפיזם של חוגים. נניח ש-$\deg\psi(f(x)) = \deg f(x)$ וגם $\psi(f(x))$ אי פריק. הוכיחו כי $f(x)$ אי פריק.
הדרכה: נניח בשלילה ש-$f(x) = g(x)h(x)$ הוא פירוק אמיתי (כלומר לאיברים לא הפיכים). שימו לב כי $\psi(f(x)) = \psi(g(x))\psi(h(x))$ ועכשיו משהו בדרגות הפולינומים לא מסתדר.

בהצלחה!