אינפי 4 – תרגיל 3

אינטגרל קווי/מסילתי של תבנית / פונקציה וקטורית / שדה וקטורי $\underline{\omega} = (w_1, \dots, w_n)$ לאורך מסילה $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסומן $\int_\gamma \underline{\omega} \cdot \underline{dx}$, ומחושב בתנאים מסויימים שמאפשרים זאת על ידי $\int_\gamma \underline{\omega}(\gamma(t)) \cdot \underline{\gamma'}(t)dt$, כשנקודה מסמנת מכפלה פנימית בין וקטורים. נשתמש במונחים תבנית דיפ' / שדה כאחד.

---

1. חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \underline{\omega} \cdot \underline{dx}$ עבור פונקציה וקטורית $\omega(x) = (x - 2y, x + 2y)$, לאורך מסילה שמוגדרת על ידי : $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ מהנקודה $(1,0)$ עד הנקודה $(-1,0)$, בכיוון הטריגונומטרי.

<u>פיתרון</u>

עבור הצגה פרמטרית סטנדרטית : $x = cost, y = sint, t \in [0, \pi]$, נקבל :

$$\int_\gamma \omega \cdot d\underline{x} = \int_0^\pi [(cost - 2sint) * (-sint) + (cost + 2sint) * cost]dt$$

$$= \int_0^\pi (1 + 0.5sin2t + sin^2 t)dt = \int_0^\pi \left(1 + 0.5sin2t + \frac{1 - cos2t}{2}\right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{1}{4}cos2t + \frac{1}{2}t - \frac{sin2t}{4}\right)_0^\pi = \pi - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

2. חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \underline{\omega} \cdot \underline{dx}$ עבור התבנית הדיפרנציאלית : $\underline{\omega}(x,y) = x^2dx + ydy$

לאורך מסילה שהיא המשולש שקודקודיו: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$ בכיוון הטריגונומטרי.

<u>פיתרון</u>

חישוב ישיר של האינטגרל לאורך שלושה קטעים – אחד מהראשית ל- $(1,0)$ דרך מסילה $(t,0), t \in [0,1]$, יניב ערך $\frac{1}{3}$, אינטגרל לאורך קטע בין $(1,0)$ ל – $(1,1)$ דרך מסילה: $(1,t)$ יניב ערך $\frac{1}{2}$, ולבסוף אינטגרל לאורך קטע מ- $(1,1)$ חזרה לראשית דרך מסילה (t,t) , אך כאן הפרמטר t ינוע מ- 1 ל- 0 (ולא הפוך!) , יניב ערך $\frac{-5}{6}$, וסך הכל – סכום האינטגרלים יהיה אפס !

נשים לב שהתבנית שלנו מדוייקת ! ואינטגרל קווי לאורך שפת תחום כוכבי (כך אצלנו !) , סגור – יהיה שווה בערכו לאפס . ואכן כך ! .

3. תהי $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה , פונקציה ממשית גזירה ברציפות ותהי מסילה

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות גם היא. אז קיים : $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$,
כשמצד שמאל זהו אינטגרל מסילתי של הדיפרנציאל ביחס למסילה הנתונה.

(רמז: הסתכלו בפונקציה הממשית : $g \coloneqq f \circ \gamma$ ...).

<u>פיתרון:</u> נגדיר $g = f \circ \gamma$. אז מכלל השרשרת קיים (בידקו!) :
$$g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

ניזכר כי $df = f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_n} dx_n$. מכאן שנקבל :

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \nabla f \cdot d\underline{x} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) =$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

כנדרש !

4.הראו כי פונקציה וקטורית "רדיאלית" (כלומר שערכה בוקטור תלוי בגודלו), מהצורה :

$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \varphi(\|x\|) \cdot x$, עבור פונקציה ממשית $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$
ורציפה – היא שדה משמר (או לחילופין – שהתבנית הדיפרנציאלית שמוגדרת על ידה היא מדוייקת) .

(רמז : הסתכלו ב- $f(x) \coloneqq \int_1^{\|x\|} s\varphi(s) ds$, $x \neq \underline{0} = (0,0,\ldots,0)$)

<u>פיתרון:</u>

בעצם יישום של כלל השרשרת בהגדרה מתאימה : נגדיר $t(\underline{x}) \coloneqq \|x\|$. בדיקה קצרה
תראה כי קיים : $\frac{\partial t}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\|x\|}$ לכל $1 \le k \le n$.

לפי הרמז יש להתסכל על $f(\underline{x}) \coloneqq \int_1^{\|x\|} s\varphi(s) ds$, כשבעצם נוכל להסתכל על הפונקציה :

$h(t) \coloneqq \int_1^t s\varphi(s) ds$, שהיא פונקציה של משתנה <u>ממשי</u> , ואז נקבל :

$f(\underline{x}) = h(t(\underline{x}))$. מכאן נקבל :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f = \frac{dh(\|x\|)}{dt} * \frac{\partial t}{\partial x_k}(\underline{x}) = t\varphi(t)_{t=\|x\|} * \frac{x_k}{\|x\|} = \boldsymbol{F_k(x)}, for\ 1 \le k \le n$$

כנדרש.