חישוב של אינטגרל מסוים - המשך

~~ת~~תזכורת - החלפת משתנה

ניתן לחשב אינטגרל מסויים בשיטת החלפת משתנה בשתי דרכים:

<u>דרך א'</u>: נעשה החלפת משתנה, נחליף את גבולות האינטגרל בהתאם להחלפת משתנה ונחשב את האינטגרל.

<u>דרך ב'</u>: נמצא פונק' דומה במונחים של משתנה חדש (לאחר שעשינו החלפת משתנה) ונחזור למשתנה שלנו x, ולא נעשה החלפת ~~xxxx~~ גבולות האינטגרל, אלא נעבוד עם גבולות שניתנו בשאלה.

<u>דוגמה</u>: נחשב את האינטגרל:

$$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$$

<u>פתרון: דרך א'</u>

נעשה החלפת משתנה: $t^3=1-x \Leftarrow x=1-t^3 \Leftarrow$
$\Leftarrow dx=-3t^2dt$. נשים לב לשנות את גבולות האינטגרל בהתאם לשינוי משתנה:

אם $x=1$ אז $t^3=1-1=0 \Leftarrow t=0$

אם $x=9$ אז $t^3=1-9=-8 \Leftarrow t=-2$

נציב את הכל באינטגרל שלנו ונקבל:

$$\int_0^{-2}(1-t^3)\cdot t\cdot(-3t^2)\,dt=-3\int_0^{-2}(1-t^3)\cdot t^3\,dt=$$

$$=3\int_{-2}^{0}\left[t^3-t^6\right]dt=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right]_{-2}^{0}=0-3\left[\frac{2^4}{4}+\frac{2^7}{7}\right]=$$

$$=-\frac{468}{7}$$

<u>דרך ב'</u>: פונקציה דומה שמצאנו היא $\Leftarrow 3\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right]+C$

נחזור למשתנה x ונקבל פונק' דומה:

$$3\left[\frac{(\sqrt[3]{1-x})^4}{4}-\frac{(\sqrt[3]{1-x})^7}{7}\right]+C$$

ועכשיו נחשב את האינטגרל בגבולות – ושוב, כמובן:

$$3\left[\frac{(\sqrt[3]{1-x})^4}{4} - \frac{(\sqrt[3]{1-x})^7}{7}\right]_1^9 = \dots$$

אינטגרציה בחלקים

אם פונק' $u(x)$, $v(x)$ יש נגזרת רציפות בקטע $[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

דוגמה: נחשב את

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

פתרון: נסמן: $u(x)=x$ $\quad v'(x)=\sin x$

$u'(x)=1\cdot dx \quad v(x)=-\cos x$

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)\,dx =$$

$$=[-\pi\cos\pi+0]+\sin x\Big|_0^\pi=\pi$$

משפט היסודי חשבון של חדו"א

תהי $f(x)$ פונק' רציפה ב (a,b) ותהי c נקודה כלשהי בקטע. אזי הפונק' הבאה:

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$$

היא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע (a,b)

~~משפט~~ נוסח אחר:

א. אם f רציפה ב (a,b) ו-c נקודה כלשהי בקטע אזי לכל x:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)=f(x)$$

ב. אם $\alpha(x), \beta(x)$ פונק' גזירות, ו-$f(x)$ רציפה, אזי

③

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right] = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

<u>דוגמאות:</u> גזור את הפונקציות:

א. $$I(x) = \int_2^x e^{-t^2}\,dt$$

<u>פתרון:</u>

$$\frac{d}{dx}(I(x)) = I'(x) = e^{-x^2}$$

ב. $$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

<u>פתרון:</u> (לפי דרך כל את הפונקציה $u(x)=x^3$

ולפי)

$$J(u) = \int_1^u \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

כיוון כי $I(x)=J(u(x))$ ולכן לפי כלל

השרשרת:

$$I'(x) = J'(u)\cdot u'(x) = \frac{\ln u}{u^2}\cdot 3x^2 = \frac{\ln x^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{9\ln x}{x^4}$$

<u>פרק ב':</u> לשימוש בנוסחה ב' במסגרת הדוגמא.

ג. $$F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

<u>פתרון:</u> נשתמש בנוסחה ב':

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^4}}\cdot(x^2)' - \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^4}}\cdot(x^3)' =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^{12}}}$$

שימושים של אינטגרל ~~מסוים~~ מסוים

תרגול מסכם:

א) חשב

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt}{x^6}$$

פתרון: מונה $\to 0$ כאשר $x \to 0$ כי שטח
אין שואף ל אפס וכמו כן ש- $\int_0^0 \sin t^2\,dt = 0$
גם המכנה שואף לאפס ולכן נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^4}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}$$

ב)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{3x}=\frac{2}{3}$$

ג)

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\int_\pi^{x}\cos^2 t\,dt}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\cos^2 x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\frac{t\,dt}{\cos t}}{\sin^2 x}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{\cos x}\right)}{2\sin x\cos x}=\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\right)}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x(1+\cos 2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\underbrace{(1+\cos 2x)}_{2}+\underbrace{\sin x\cdot(-2\sin 2x)}_{0}}$$

$$=\frac{1}{2}$$