פתרון תרגיל 6

שאלה 1

יהי R^3 מרחב וקטורי מעל R.
עבור אילו ערכים של m וקטור v שייך לתת- מרחב הנפרש על ידי הוקטורים v_1 ו- v_2?
מצא את הצירוף הלינארי המבטא את v.

א) $v_2=(2,1,-1), v_1=(1,2,3), v=(1,m,-m)$

ב) $v_2=(3,2,0), v_1=(2,1,-m), v=(m,-1,-2)$

פתרון

א. כדי ש-v יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, צריך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix}1\\m\\-m\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

ולכן נשים במטריצה ונפתור.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\2&1&m\\3&-1&-m\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&-3&m-2\\0&-7&-m-3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow\frac{R_2}{-3}}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&\frac{m-2}{-3}\\0&-7&-m-3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+7R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&\frac{m-2}{-3}\\0&0&\frac{10m-5}{-3}\end{array}\right)$$

כדי שלא נקבל שורת סתירה וכדי שהוא באמת יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, נדרוש ש: $\frac{10m-5}{-3}=0$. ולכן נקבל: $m=\frac{1}{2}$.

מכאן נקבל: $\alpha=0,\beta=\frac{1}{2}$. ולכן הצירוף הלינארי הוא: $\begin{pmatrix}1\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

ב. כדי ש-v יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, צריך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix}m\\-1\\-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-m\end{pmatrix}$$

ולכן נשים במטריצה ונפתור.

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&2&m\\2&1&-1\\0&-m&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&m+1\\2&1&-1\\0&-m&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&m+1\\0&-1&-2m-3\\0&-m&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-mR_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&m+1\\0&-1&-2m-3\\0&0&2m^2+3m-2\end{array}\right)$$

כדי שלא נקבל שורת סתירה וכדי שהוא באמת יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, נדרוש ש: $2m^2+3m-2=0$. ולכן נקבל: א $m=\frac{1}{2}$ ו $m=-2$.

מכאן נקבל עבור $m=\frac{1}{2}$: $\alpha=-2.5,\beta=4$. ולכן הצירוף הלינארי הוא:

$$\begin{pmatrix}1/2\\-1\\-2\end{pmatrix}=-2.5\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\1\\-0.5\end{pmatrix}.$$

ועבור $m=-2$: $\alpha=0,\beta=-1$. ולכן הצירוף הלינארי הוא: $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

שאלה 2

קבע לאילו ערכי הפרמטר הממשי a הקבוצה הבאה בלתי תלויה לינארית? נמק.

$$\left\{\begin{pmatrix}-3+a\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a-4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\5\\2a-1\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון

נכניס למטריצה ונבדוק עבור אילו ערכים a לא נקבל שורת אפסים.

$$\begin{pmatrix}-3+a & 2 & 1\\ 1 & a-4 & -1\\ -2 & 5 & 2a-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+2R_2]{R_1\leftarrow R_1-(-3+a)R_2}\begin{pmatrix}0 & -a^2+7a-10 & a-2\\ 1 & a-4 & -1\\ 0 & 2a-3 & 2a-3\end{pmatrix}$$

ולכן עבור a=1.5 נקבל שורה שמתאפסת ולכן נדרוש $a\neq 1.5$.

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3/(2a-3)}\begin{pmatrix}0 & -a^2+7a-10 & a-2\\ 1 & a-4 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-(-a^2+7a-10)R_3}\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2-6a+8\\ 1 & a-4 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

ולכן כדי שלא יתקבל שורת אפסים, והוקטורים היו בת"ל, נדרוש ש: $a^2-6a+8\neq 0$ וגם . ולכן

$a\neq 1.5,2,4.$

שאלה 3

בדוק האם הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אם לא, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש

$$.\ \mathbb{R}^3\overset{?}{=}span\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\}$$

פתרון

כדי לבדוק אם הנפרש שווה ל-R^3, נקח וקטור כלשהו ב-R^3, וננסה להציג אותו כצירוף לינארי של שאר וקטורי הקבוצה הנתונה.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. נעביר למטריצה ונדרג. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & a \\ 0 & 1 & 5 & b \\ 4 & 0 & 12 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & a \\ 0 & 1 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a \end{array}\right)$

ולכן קיבלנו שכאשר: $c-2a \neq 0$ אזי נקבל שורת סתירה. ולכן הוקטורים לא פורשים את R^3., כגון הם לא פורשים את הוקטור: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

שאלה 4

בדוק האם הוקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C. ב. מעל R.

פתרון

למדנו כי וקטורים יהיו תלויים לינארית אם אפשר להציג וקטור צירוף לינארי של שאר הוקטורים. כאן יש לנו רק שני וקטורים ולכן נבדוק אם וקטור אחד הוא צירוף לינארי של השני. כלומר סקלר כפול הוקטור השני.

$$\begin{pmatrix} i+1 \\ i-1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

א. מעל C: נקבל שלוש משוואות:

$$\alpha = i+1$$
$$\alpha i = i-1$$
$$\alpha(i-1) = -2$$

ואכן, $\alpha = i+1$. מקיים את שלושת המשוואות. ולכן הקבוצה ת"ל.

ב. מעל R: נקבל את אותם שלושה משוואות אבל הפעם $\alpha \in \mathbb{R}$. ולכן חייב להיות ממשי. וכבר מהמשוואה הראשונה רואים שזה לא ייתכן. ולכן במקרה זה הקבוצה היא בת"ל.

שאלה 5

<u>תרגיל:</u>
הוכח/הפרך

א) אם u,v,w ת"ל, אז $sp(u,w)=sp(u,v)$.

<u>פיתרון:</u> הטענה לא נכונה. למשל עבור:

$$v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow sp\{u,v\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right\}\neq\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=sp\{u,w\}$$

גם עבור בחירה של $u=0$ ו- w,v בת"ל כלשהם, זו תהיה דוגמא נגדית.

ב) אם $\{u,v,w\}$ הם כאלה שכל שניים מהם הם בת"ל, אז גם $\{u,v,w\}$ בת"ל.

<u>פיתרון:</u> הטענה לא נכונה. למשל נבחר:

$$v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

קל לוודא שכל זוג וקטורים הוא בת"ל, אבל שלושתם יחד הם ת"ל, למשל עבור הצירוף הלינארי הבא:

$$1\cdot v+1\cdot u-1\cdot w=0$$