פתרון תרגיל 6 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

1. נגזור ונכפיל את וקטורי הנגזרות זה בזה.

   (א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u,v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u=\left(1,0,f_u\right),X_v=\left(0,1,f_v\right)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered}g_{11}=\langle X_u,X_u\rangle=1+f_u^2\\ g_{12}=g_{21}=\langle X_u,X_v\rangle=f_uf_v\\ g_{22}=\langle X_v,X_v\rangle=1+f_v^2\end{gathered}$$

ובסה"כ המטריקה היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}1+f_u^2 & f_uf_v\\ f_uf_v & 1+f_v^2\end{array}\right)$$

   (ב) המשטח שלנו הוא חרוט.
נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_\phi=\left(\cos\theta,\sin\theta,k\right),X_\theta=\left(-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta,0\right)$$

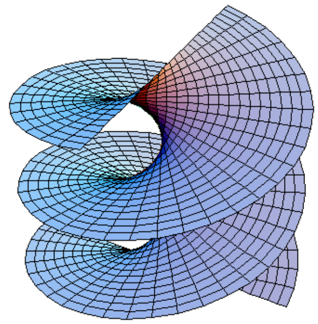
מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered}g_{11}=\langle X_\theta,X_\theta\rangle=\cos^2\theta+\sin^2\theta+k^2=1+k^2\\ g_{12}=g_{21}=\langle X_\theta,X_\phi\rangle=-\phi\cos\theta\sin\theta+\phi\cos\theta\sin\theta+0^2=0\\ g_{22}=\langle X_\phi,X_\phi\rangle=\phi^2\sin^2\theta+\phi^2\cos^2\theta+0^2=\phi^2\end{gathered}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}1+k^2 & 0\\ 0 & \phi^2\end{array}\right)$$

(ג) המשטח שלנו הוא הליקואיד:



נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_u = (\cos v, \sin v, 0), X_v = (-u \sin v, u \cos v, k)$$

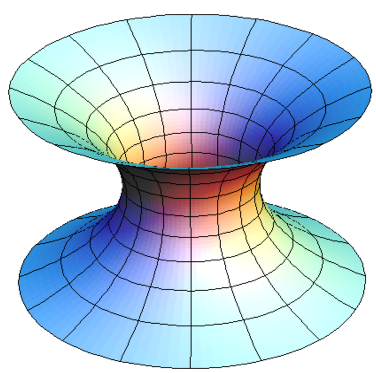
מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v + 0 = 0 \\ g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + k^2 = u^2 + k^2 \end{gathered}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + k^2 \end{pmatrix}$$

(ד) המשטח שלנו הוא קטנואיד:



לפני שנתחיל בגזירות ובחגיגות, נזכור ש:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

ובזהויות בסיסיות של הפונקציות ההיפרבולית, כגון:

$$(\cosh t)' = \sinh t, (\sinh t)' = \cosh t, 1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, 1)\,, X_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = \sinh^2\phi\cos^2\theta + \sinh^2\phi\sin^2\theta + 1 = \sinh^2\phi + 1 = \cosh^2\phi$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\cos^2\theta = \cosh^2\phi$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh^2\phi \end{pmatrix}$$

(ה) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (2\cos\phi\cos\theta, 2\cos\phi\sin\theta, -2\sin\phi), X_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta, 2\sin\phi\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = 4\cos^2\phi\cos^2\theta + 4\cos^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi = 4$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = 4\sin^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi\cos^2\theta = 4\sin^2\phi$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(ו) המשטח שלנו הוא היפרבולואיד.
וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, \cosh\phi)\,, X_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = \sinh^2\phi\cos^2\theta + \sinh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi = \cosh 2\phi$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\cos^2\theta = \cosh^2\phi$$

ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh 2\phi \end{pmatrix}$$

2. נסמן את מטריצת הסיבוב (במישור) בזווית של θ נגד כיוון השעון ב$-R_\theta$.
סיבוב של $\alpha+\beta$ הוא סיבוב של α ואז של β, כלומר:

$$R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

נכפיל את המטריצות מימין ונקבל את הזהויות הדרושות. למשל האיבר $1,1$ נותן:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ועל זו הדרך.

3. נחשב את המטריקה (g_{ij}). וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (0,0,1)\,, X_s = \left(\left(\alpha^1(s)\right)', \left(\alpha^2(s)\right)', 0\right)$$

ולכן:

$$\begin{aligned} g_{22} &= X_u \cdot X_u = 1 \\ g_{12} = g_{21} &= X_u \cdot X_s = 0 \\ g_{11} &= X_s \cdot X_s = \|\alpha'(s)\|^2 \end{aligned}$$

ולכן אם נבחר פרמטריזציה טבעית (שבה $\|\alpha'(s)\| = 1$) נקבל שאכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4. נשתמש במטריקה (g_{ij}).

(א) וקטור הנגזרות הוא: $\alpha'(t) = (0,2)$, ולכן האורך הוא:

$$L(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(0,2)\|\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\cos\theta\cos\phi, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)\,, X_\theta = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\phi\cos\theta, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle X_\theta, X_\theta\rangle & \langle X_\theta, X_\phi\rangle \\ \langle X_\phi, X_\theta\rangle & \langle X_\phi, X_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן, האורך הוא:

$$L(X\circ\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2 2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} d\phi = \pi$$

כלומר, האורך לא השתנה.

ג) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = \left(-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\right), X_\theta = \left(-\left(2+\cos\phi\right)\sin\theta, \left(2+\cos\phi\right)\cos\theta, 0\right)$$

ולכן:

$$g_{22} = X_\phi \cdot X_\phi = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = X_\phi \cdot X_\theta = 0$$

$$g_{11} = X_\theta \cdot X_\theta = \left(2+\cos\phi\right)^2$$

כלומר $\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \left(2+\cos\phi\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

כעת, נחשב את השטח באמצעות הנוסחה:

$$\iint\limits_{r(D)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\cos\phi\right) d\phi d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\phi + \sin\phi\right)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\pi+1\right) d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\pi+1\right)$$

$$\iint\limits_{r(E)} dS = \iint\limits_{E} \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} dS = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\cos\phi\right) d\phi d\theta = \pi\left(\pi+1\right)$$

הטורוס נראה כך: