אלגברה לינארית II־ הוכחות משפטים

ע"פ הרצאות פרופ' מ.קריבלביץ'

14 ביוני 2011

נערך ע"י אורי אלברטון

1 משפט הקיום והיחידות של פירוק לפולינומים אי־פריקים

משפט 1.1 יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום כך ש־$\deg(f) \geq 1$, אזי קיימים פולינומים אי־פריקים $p_1, ..., p_n \in F[x]$ כך ש־ $f = p_1p_2...p_n$.

יתרה מזאת אם $f = p_1p_2...p_n$ וכן $f = q_1q_2...q_m$ כאשר $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_m \in F[x]$ אזי $m = n$ וקיימת תמורה $\sigma \in S_n$ וקבועים $\lambda_1, ..., \lambda_n \in F$ כך ש־$\forall 1 \leq i \leq n : \ p_i = \lambda_i q_{\sigma(i)}$

הוכחה:

קיום: נוכיח קיום באינדוקציה על $\deg(f)$.

בסיס האינדוקציה: $\deg(f) = 1$ אזי f בעצמו אי־פריק, כי אם קיימים g, h כך ש־$f = gh$ אזי $1 = \deg(gh) = \deg(g) + \deg(h)$ ולכן בהכרח $\deg(g) = 0$ או $\deg(h) = 0$. לכן באופן טריוויאלי $f = f$.

צעד האינדוקציה: אם f כבר אי־פריק אז סיימנו.

אחרת קיימים פולינומים $g, h \in F[x]$ כך ש־ $\deg(g), \deg(h) < \deg(f)$ומתקיים $f = gh$.
נוכל להפעיל את הנחת האינדוקציה על g, h ולקבל כי:

$$\begin{aligned} g &= p_1p_2...p_n \\ h &= q_1q_2...q_m \end{aligned}$$

כאשר $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n \in F[x]$ גורמים אי־פריקים.

לכן $f = p_1...p_nq_1...q_m$, כלומר f הינו מכפלה של פולינומים אי־פריקים.

יחידות:

למה 1.2 יהיו $f, g, p \in F[x]$ כאשר p פולינום אי־פריק. אם p מחלק את המכפלה fg אזי p מחלק את f או p מחלק את g.

הוכחת הלמה: נניח כי p אינו מחלק את f ונסתכל על $\gcd(f,p)$. מכיוון ש־p אי־פריק נובע כי $1 \in \gcd(f,p)$.

לכן ניתן להציג $1 = h_1 f + h_2 p$ כאשר $h_1, h_2 \in F[x]$ (מכיוון שע"פ משפט שהוכחנו $1 \in \gcd(f,p) \Rightarrow < 1 > = < f, g >$) . נכפול את שני האגפים של השוויון הנ"ל ב־g ונקבל:

$$g = gh_1 f + gh_2 f$$

נשים לב כי $h_1(gf)$ ו־$h_2(gf)$ מתחלקים ב־p ולכן גם g מתחלק ב־p.

<u>מסקנה מהלמה:</u> אם p פולינום אי־פריק ו־pמחלק את המכפלה $q_1 q_2 ... q_m$ אזי קיים $1 \leq i \leq m$ כך ש־p מחלק את q_i.

הוכחת יחידות הפירוק: נתון כי $f = p_1 p_2 .. p_n = q_1 q_2 ... q_m$ כאשר $p_1, .., p_n, q_1, ..., q_m$ אי־פריקים.

p_1 מחלק את $f = q_1 q_2 ... q_m$ ולכן על פי המסקנה מהלמה קיים $1 \leq i \leq m$ כך ש־p_1 מחלק את q_i, מכיוון ש־ p_1, q_i שניהם אי פריקים נובע כי קיים קבוע $0 \neq \lambda_i \in F$ כך ש־ $q_i = \lambda_i p_1$.

נצמצם את p_1 בשני האגפים של ההצגה של f, נקבל $p_2 ... p_n = \lambda_1 q_1 ... q_{i-1} q_{i+1} .. q_m$.
נמשיך באותו האופן עד שנקבל התאמה מלאה בין p_i־ים לבין q_i־ים. ■

2 וקטורים השייכים לערכים עצמיים שונים בלתי תלויים ליניארית

משפט 2.1 יהי V מרחב וקטורי n מימדי ($n \geq 1$) מעל שדה F ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית. נניח כי $\lambda_1, ..., \lambda_k \in F$ ערכים עצמיים שונים של T וכן $v_1, ..., v_k$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים העצמיים הנ"ל בהתאמה. אזי הקבוצה $x = \{v_1, ..., v_k\}$ הינה קבוצה בלתי תלויה ליניארית ב־V.

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה ב־k.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> $k = 1$, הקבוצה $x = \{v_1\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית מכיוון ש־v_1 וקטור עצמי של T ולכן על פי ההגדרה $v_1 \neq 0$. על כן לא קיים $0 \neq \alpha \in F$ כך ש־ $\alpha v = 0$.

<u>צעד האינדוקציה:</u> תהי $x = \{v_1, ..., v_k\}$ קבוצה כנ"ל, יש לוודא כי x קבוצה בת"ל.
נניח כי עבור $\alpha_1, .., \alpha_k \in F$ מתקיים :

$$(\star)\ \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0$$

יש להוכיח כי $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. נפעיל את T על שני האגפים של $(\star)$ ונקבל:

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(\star\star) \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$$

עתה נכפול את $(\star)$ ב־λ_1 ונקבל את השוויון:

$$(\star\star\star)\ \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_1 v_2 + ... + \alpha_k\lambda_k v_k = 0$$

נחסיר את $(\star\star\star)$ מ־$(\star\star)$ ונקבל :

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + ... + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$$

כיוון שעל פי הנחת האינדוקציה הקבוצה $x = \{v_2, ..., v_k\}$ בת"ל, נובע כי כל המקדמים בשוויון האחרון מתאפסים: $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = ... = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$.

על פי הנחת המשפט $\lambda_1 \neq \lambda_i$ לכל $2 \leq i \leq k$ ולכן נובע כי בהכרח: $\alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.

נציב את הערכים שקיבלנו ב־$(\star)$ ונקבל $\alpha_1 v_1 = 0$. מכיוון ש־v_1 וקטור עצמי בהכרח $v_1 \neq 0$ ולכן קיבלנו כי $\alpha_1 = 0$.

כלומר, הראינו כי $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$ ולכן הקבוצה $x = \{v_1, ..., v_k\}$ בלתי תלויה ליניארית. ■

3 ריבוי גיאומטרי של ערך עצמי אינו עולה על ריבויו האלגברי

משפט 3.1 יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה F ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית. נניח כי $\lambda \in F$ הינו ערך עצמי של T, אזי הריבוי הגיאומטרי של λ אינו עולה על ריבויו האלגברי.

הוכחה: נגדיר $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$המרחב העצמי של Tהשייך ע"ע λ. לפי ההגדרה הריבוי הגיאומטרי של λ הינו $\dim V_\lambda$, נניח $\dim V_\lambda = r$.

ניקח בסיס כלשהוא $B_0 = \{v_1, ..., v_r\}$ של V_λ ונשלים את B_0 לבסיס של V, $B = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$.

נייצג את T לפי בסיס B, כאשר מתקיים:

$$\begin{gathered} Tv_1 = \lambda v_1 \\ \vdots \\ Tv_r = \lambda v_r \\ Tv_{r+1} = \alpha_{r+1,1}v_1 + ... + \alpha_{r+1,n}v_n \\ \vdots \\ Tv_n = \alpha_{n1}v_1 + ... + \alpha_{nn}v_n \end{gathered}$$

ולכן:

$$A = [T]_B = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 & \alpha_{r+1,1} & \cdots & \alpha_{n1} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & & & \\ & & & \alpha_{r+1,n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

ולכן הפולינום האופייני של T הינו:

$$P_T(t) = P_A(t) = \begin{vmatrix} t-\lambda & & 0 & -\alpha_{r+1,1} & \cdots & -\alpha_{n1} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & t-\lambda & \vdots & & \vdots \\ & & & t-\alpha_{r+1,r+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & -\alpha_{r+1,n} & \cdots & t-\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

כלומר , אם נסמן את הבלוק הימני התחתון במטריצה הנ"ל כ- $Q(t)$ אזי

$$P_T(t) = P_A(t) = (t-\lambda)^r \det Q(t)$$

לכן הריבוי של λ כשורש של $P_T(t)$ שהוא לפי ההגדרה הריבוי האלגברי של λ, הוא לפחות r.

הראינו כי : הריבוי הגיאומטרי של $\lambda \leq$הריבוי האלגברי של λ ■

4 שילוש של העתקה לינארית במרחב וקטורי מרוכב

משפט 4.1 יהי V מרחב וקטורי n מימדי ($n \geq 1$) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$ו-T העתקה לינארית. אזי ל-T קיים בסיס משלש.

הוכחה: נוכיח כי קיים בסיס B המקיים את התנאי $Tv_i \in \text{sp}\{v_1, ..., v_i\}$ אשר הינו תנאי מספיק והכרחי להיות הבסיס משלש (ע"פ טענה שהוכחה בכיתה). ההוכחה באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> $n = 1$, כל מטריצה $A \in M_1(\mathbb{C})$ הינה משולשית עליונה ולכן כל בסיס B של Vהינו בסיס משלש.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח כי הוכחנו עבור $\dim V < n$ ונוכיח עבור $\dim V = n$.

יהי איפוא $P_T(t)$ הפולינום האופייני של T. אזי $P_T(t) \in \mathbb{C}(t)$הינו פולינום ממעלה $n \geq 1$, לכן על פי המשפט היסודי של האלגברה ל-$P_T(t)$ קיים שורש $\lambda \in \mathbb{C}$.

יהי $v \in V$ וקטור עצמי כלשהו השייך לערך עצמי λ, לכן $v \neq 0$ וכן $Tv = \lambda v$.

ניקח $B_0 = \{v\}$ ונשלים את B_0 לבסיס B של המרחב V כולו בצורה שרירותית: $B = \{v_1, w_2, ..., w_n\}$.

אם נגדיר $U = \text{sp}\{v_1\}$ וכן $W = \text{sp}\{w_2, ..., w_n\}$, אזי $V = U \oplus W$. כלומר לכל $v \in V$ קיים זוג סדור יחיד u, w כאשר $u \in U \,\&\, w \in W$ ומתקיים: $v = u + w$.

נגדיר שתי העתקות הטלה $P_1 : V \to U$ ו־ $P_2 : V \to W$ באופן הבא:

עבור $v \in V$, לפי האמור לעיל, קיימת הצגה יחידה $v = u + w$, נגדיר $P_1 v = u,\ P_2 v = w$.

נשים לב כי $(P_1 + P_2)v = u + w = v$ ולכן $P_1 + P_2$ הינה העתקת הזהות. כמו כן, P_1, P_2 שתיהן העתקות לינאריות.

נגדיר העתקה $S : W \to W$ על ידי $S = P_2 \circ T$, זוהי העתקה לינארית של מרחב וקטורי $n-1$ מימדי מרוכב W.

על פי הנחת האינדוקציה ל־S קיים בסיס משלש $\{v_2, ..., v_n\}$של W, כלומר בסיס B_2 עבורו $Sv_i \in \text{sp}\{v_2, ..., v_i\}$ לכל $2 \le i \le n$.

נגדיר עתה $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בסיס של V ונראה שזהו בסיס משלש עבור T.

לכל $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$Tv_i = (P_1 + P_2)Tv_i = P_1 Tv_i + P_2 Tv_i = P_1 Tv_i + Sv_i$$

עבור $i = 1$ מתקיים $Tv_1 = \lambda v_1$ ולכן $Tv_1 \in \text{sp}\{v_1\}$.

לכל $2 \le i \le n$ מתקיים $Tv_i = P_1 Tv_i + Sv_i$, מכיוון ש־P_1 הטלה המעבירה כל וקטור ב־V ל־U נובע כי $P_1 Tv_i \in U = \text{sp}\{v_1\}$.

כמו כן, מכך ש־$B_2 = \{v_2, ..., v_n\}$ בסיס משלש עבור S נובע כי $Sv_i \in \text{sp}\{v_2, ..., v_n\}$, לכן $Tv_i \in \text{sp}\{v_1, ..., v_i\}$. מכאן B בסיס משלש עבור T. ■

5 משפט קיילי־המילטון

משפט 5.1 תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה, ויהי $P_A(t) \in F[t]$ הפולינום האופייני של A אזי מתקיים $P_A(A) = 0$.

תזכורת: המטריצה הצמודה ל־A הינה $(\text{adj}A)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$ ומתקיים $A\text{adj}A = \det(A)I$.

הוכחה: מתקיים כי $(tI - A)\text{adj}(tI - A) = \det(tI - A)I$.

נזכור כי $P_A(t) = \det(tI - A)$ הפולינום האופייני של A הינו פולינום מתוקן ממעלה nעם מקדמים בשדה F.

נרשום: $P_A(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{n-1} t^{n-1} + t^n$.

נשים לב כי כל איבר במטריצה $\text{adj}(tI - A)$ הינו פולינום ממעלה $\ge n-1$ במשתנה t, ולכן נוכל לרשום:

$$\text{adj}(tI - A) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + ... + B_{n-1} t^{n-1}$$

נציב את השוויון הנ"ל לתוך השוויון $(tI-A)\mathrm{adj}(tI-A)=P_A(t)I$ ונקבל:

$$(tI-A)(B_0+B_1t+...+B_{n-1}t^{n-1})=(\alpha_0+\alpha_1t+...+\alpha_{n-1}t^{n-1}+t^n)I$$

נשווה את המטריצות ליד כל חזקה של t בשני האגפים של השוויון הנ"ל, נקבל:

$$\begin{array}{rcl} RHS & LHS & Power \\ \alpha_0I & -AB_0 & 0 \\ \alpha_1I & B_0-AB_1 & 1 \\ \alpha_2I & B_1-AB_2 & 2 \\ & \vdots & \\ \alpha_{n-1}I & B_{n-2}-AB_{n-1} & n-1 \\ I & B_{n-1} & n \end{array}$$

נזכור כי $P(A)=\alpha_0I+\alpha_1A+...+\alpha_{n-1}A^{n-1}+A^n$.
עבור $0\le i\le n$ נכפול את השוויון המטריצי ה־i בטבלה הנ"ל ב־A^i ונסכום את כלל השוויונות יחדיו, באגף ימין נקבל $P_A(A)$, באגף שמאל נקבל:

$$-AB_0+AB_0-A^2B_1+A^2B_1-....-A^nB_{n-1}+A^nB_{n-1}=0\in M_n(F)$$

כלומר קיבלנו $P_A(A)=0$. ■

6 מטריצה A דומה ל־A^t

משפט 6.1 תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה, אזי A דומה ל־A^t.

הוכחה: נניח כי $G\in M_n(\mathbb{C})$ היא מטריצת ז'ורדן ו־$P\in M_n(\mathbb{C})$ היא מטריצה הפיכה כך ש־$G=P^{-1}AP$.
נשים לב כי

$$G^t=(P^{-1}GP)^t=P^tA^t(P^{-1})^t=P^tA^t(P^t)^{-1}$$

ולכן A^t דומה ל-G^t. כיוון שיחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי מספיק להראות כי G דומה ל-G^t.

נניח כי $G = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_k}(\lambda_k))$, אזי $G^t = \text{diag}(J^t_{n_1}(\lambda_1), ..., J^t_{n_k}(\lambda_k))$.

לכן די להראות כי אם $J_n(\lambda)$ בלוק ז'ורדן אזי $J_n(\lambda)$ ו- $J_n(\lambda)^t$ דומות.

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad J^t_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

נגדיר מטריצה $Q \in M_n(\mathbb{C})$ ע"י:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

Q מטריצת תמורה (כלומר מתקבלת ממטריצת היחידה על ידי חילופי שורות) ולכן הפיכה. למעשה $Q = Q^{-1}$.

קל לראות כי $J^t_n(\lambda) = Q^{-1}J_n(\lambda)Q = QJ_n(\lambda)Q$.

לכן קיבלנו ש- $J_n(\lambda)$ ו־$J^t_n(\lambda)$ דומות $\Leftarrow G$, G^t דומות (כי כל בלוק דומה לשחלוף שלו) $\Leftarrow$ A, A^t דומות. ■

7 אי־שוויון קושי־שוורץ

משפט 7.1 (אי שוויון קושי־שוורץ) יהי V מ"ו ממשי עם מכפלה פנימית $<,>$, אזי לכל $a, b \in V$ קיים:

$$< a, b >^2 \leq < a, a >< b, b >$$

הוכחה: אם $a = 0$ אז $< a, b >=< b, a >= 0$ ולכן אי השוויון מתקיים. נניח כי $a \neq 0$. לכל $t \in \mathbb{R}$ קיים:

$$< ta + b, ta + b > \geq 0$$

אבל:

$$< ta + b, ta + b >= t^2 < a, a > +2t < a, b > + < b, b >$$

לכן, לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$t^2 < a,a> +2t < a,b> + < b,b> \geq 0$$

נציב $t = -\frac{<a,b>}{<a,a>}$ (נזכור כי $< a,a > \neq 0$ כי $a \neq 0$ ומחיוביות מכפלה פנימית), ונקבל:

$$(-\frac{<a,b>}{<a,a>})^2 < a,a > +2(-\frac{<a,b>}{<a,a>}) < a,b > + < b,b > \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$< b,b > -\frac{<a,b>^2}{<a,a>} \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$< a,b >^2 \leq < a,a >< b,b >$$

■

8 תהליך גראם־שמידט

משפט 8.1 יהי V ממ"פ ממימד $n \geq 1$ ונניח כי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס סדור של V.
אז קיים בסיס סדור אורתונורמלי $B^* = \{v_1^*, ..., v_k^*\}$ של V כך שלכל $1 \leq k \leq n$ קיים $\mathrm{sp}\{v_1, ., v_k\} = \mathrm{sp}\{v_1^*, ..., v_k^*\}$.

הוכחה: באינדוקציה על k.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> $k = 1$ נגדיר $v_1^* = \frac{v_1}{||v_1||}$ ואז $||v_1^*|| = 1$ וכן $sp\{v_1\} = sp\{v_1^*\}$.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח כי מצאנו כבר וקטורים $v_1, ..., v_k^*$ המקיימים את תנאי המשפט ונמצא את v_{k+1}^*.
נסמן:

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, v_i^* > v_i^*$$

נשים לב כי לפי ההגדרה $w_{k+1} \perp \{v_1^*, ..., v_k^*\}$ מכיוון ש:

$$\forall 1 \leq i \leq k \qquad < w_{k+1}, v_i^* >=< v_{k+1}, v_i^* > - \sum_{j=1}^{k} < v_{k+1}, v_j^* >< v_j^*, v_i^* >=$$
$$=< v_{k+1}, v_i^* > - < v_{k+1}, v_i^* >= 0$$

אם $w_{k+1}=0$ אזי נקבל כי $v_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}<v_{k+1},v_i^*>v_i^*$, כלומר $v_{k+1}\in \mathrm{sp}\{v_1^*,...,v_k^*\}=\mathrm{sp}\{\mathrm{v_1,...,v_k}\}$ בסתירה לכך ש־$\{v_1,...,v_{k+1}\}$ בסיס ולכן קבוצה בלתי תלויה ליניארית.

לכן $w_{k+1}\neq 0$ וניתן להגדיר $v_{k+1}^*=\frac{w_{k+1}}{||w_{k+1}||}$.

הקבוצה $\{v_1^*,...,v_{k+1}^*\}$ היא קבוצה אורתונורמלית ולכן בת"ל.

כמו כן מתקיים כי $\mathrm{sp}\{v_1^*,...,v_{k+1}^*\}\subseteq \mathrm{sp}\{v_1,...,v_{k+1}\}$

זאת מכיוון ש:

1. $\mathrm{sp}\{v_1^*,...,v_k^*\}=\mathrm{sp}\{\mathrm{v_1,...,v_k}\}$
2. על פי ההגדרה ניתן לראות כי v_{k+1}^* הינו צירוף ליניארי של וקטור השייך ל־$\mathrm{sp}\{v_1^*,...,v_k^*\}$ ו־v_{k+1},לכן $v_{k+1}^*\in \mathrm{sp}\{v_1,..,v_{k+1}\}$.

כיוון ש־$\dim \mathrm{sp}\{v_1,..,v_{k+1}\}=k+1$ ו־$\{v_1^*,..,v_{k+1}^*\}$ קבוצה בת"ל, נובע למעשה כי $\{v_1^*,...,v_{k+1}^*\}$ הינה בסיס של $\mathrm{sp}\{v_1,...,v_{k+1}\}$.

לכן $\mathrm{sp}\{v_1^*,...,v_{k+1}^*\}=\mathrm{sp}\{v_1,...,v_{k+1}\}$. ■

9 קיום, יחידות ולינאריות ההעתקה הצמודה

משפט 9.1 יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית אזי:

1. קיימת ויחידה העתקה $T^*:V\to V$ המקיימת

$$\forall u,v\in V:<Tu,v>=<u,T^*v>$$

2. ההעתקה T^* היא ליניארית.

הוכחה:

1) **קיום ויחידות:** נבחר שרירותית בסיס אורתונורמלי $B=\{w_1,...,w_n\}$ של V.

<u>קיום:</u> נגדיר $T^*:V\to V$ על ידי:

$$\forall v\in V:\ T^*v=\sum_{i=1}^{n}<\overline{Tw_i,v}>w_i$$

נוודא כי השוויון $<Tu,v>=<u,T^*v>$ אכן מתקיים.

יהי $u\in V$ נפתח את u לפי בסיס B: $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$.

אזי:

$$<Tu,v>=<T(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i),v>=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i<w_i,v>$$

$$<u,T^*v>=<\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j w_j,\sum_{i=1}^{n}<\overline{Tw_i,v}>w_i>=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i<Tw_i,v>$$

כלומר, לכל $u,v\in V$ קיים: $<Tu,v>=<u,T^*v>$ ולכן הוכחנו קיום.

יחידות: נניח $S:V\to V$ העתקה (לאו דווקא לינארית) המקיימת $<Tu,v>=<u,Sv>$ לכל $u,v\in V$.

אזי מתקיים $\forall u,v\in V:<u,T^*v>=<u,Sv>$ ולכן על פי טענה שהוכחנו בהרצאה $S=T^*$.

2)**ליניאריות:** על מנת להוכיח את הליניאריות של T^* כנ"ל, די להוכיח כי לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל שני סקלרים α_1,α_2 מתקיים :

$$T^*(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1T^*v_1+\alpha_2T^*v_2$$

אכן, לכל $u\in V$ קיים לפי ההגדרה של T^*:

$$<u,T^*(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)>=<Tu,\alpha_1v_1+\alpha_2v_2>=\overline{\alpha}_1<Tu,v_1>+\overline{\alpha}_2<Tu,v_2>=$$

$$=\overline{\alpha}_1<u,T^*v_1>+\overline{\alpha}_2<u,T^*v_2>=<u,\alpha_1T^*v_1+\alpha_2T^*v_2>$$

כלומר קיבלנו כי לכל $u\in V$ מתקיים: $<u,T^*(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)>=<u,\alpha_1T^*v_1+\alpha_2T^*v_2>$.

לכן על פי טענה שהוכחנו בהרצאה $T^*(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1T^*v_1+\alpha_2T^*v_2$ ■

10 העתקה נורמלית עם פולינום אופייני מתפרק לגורמים ליניאריים־לכסינה אוניטרית

משפט 10.1 (תנאי מספיק והכרחי) יהי V ממ"פ, ו־$T:V\to V$, אזי T לכסינה אוניטרית אם ורק אם מתקיים:

1. T נורמלית
2. הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים.

הוכחה: ראשית נוכיח מספר למות.

למה 1: תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של ממ"פ V. נניח כי $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים. אז קיים בסיס B^* של V שבו מטריצת הייצוג $[T]_{B^*}$ הינה משולשית עליונה, כאשר B^* הינו בסיס אורתונורמלי.

הוכחת למה 1: ממשפטים קודמים שהוכחנו בהרצאות נובע כי:

1. ל־T כנ"ל קיים בסיס משלש B, כלומר בסיס $B=\{v_1,..,v_n\}$ בו מטריצת הייצוג $[T]_B$ הינה משולשית עליונה.

2. בסיס סדור $B=\{v_1,...,v_n\}$ הוא בסיס משלש עבור העתקה ליניארית אם ורק אם מתקיים: $Tv_i \in \mathrm{sp}\{v_1,..,v_i\}$ לכל $1 \le i \le n$.

יהי אפוא $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס משלש כנ"ל עבור T. נפעיל את תהליך גראם־שמידט על B.

נקבל בסיס אורתונורמלי $B^*=\{v_1^*,...,v_n^*\}$ המקיים $\mathrm{sp}\{v_1,..,v_i\}=\mathrm{sp}\{v_1^*,..,v_i^*\}$ לכל $1 \le i \le n$.

בפרט $v_i^* \in \mathrm{sp}\{v_1,...,v_i\}$, כלומר קיימים סקלרים $\alpha_{i1},..\alpha_{ii}$ כך שמתקיים:

$$(\star) v_i^* = \alpha_{i1}v_1 + ... + \alpha_{ii}v_i$$

. נפעיל את T על $(\star)$ ונקבל:

$$Tv_i^* = \alpha_{i1}Tv_1 + ... + \alpha_{ii}Tv_i$$

עתה מכיוון ש־ $B=\{v_1,..,v_n\}$ בסיס משלש עבור T אזי $Tv_1,...,Tv_i \in \mathrm{sp}\{v_1,...,v_i\}$ ולכן נובע כי:

$$Tv_i \in \mathrm{sp}\{v_1,...,v_i\} = \mathrm{sp}\{v_1^*,..,v_i^*\}$$

כלומר קיבלנו כי B^* הינו בסיס משלש עבור T. $\boxtimes$ (למה 1)

למה 2: תהי $A \in M_n(F)$, אם A משולשית עליונה ונורמלית אז A אלכסונית.

הוכחת למה 2: נתון כי A משולשית כלומר,

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{nn}\end{bmatrix} \qquad A^*=\begin{bmatrix}\overline{\alpha}_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{\alpha}_{1n} & \dots & \overline{\alpha}_{nn}\end{bmatrix}$$

בנוסף A נורמלית, כלומר $AA^*=A^*A$, נסתכל תחילה על $[A^*A]_{11}=[AA^*]_{11}$.

$$[A^*A]_{11} = \overline{\alpha}_{11}\alpha_{11} = |\alpha_{11}|^2$$
$$[AA^*]_{11} = |\alpha_{11}|^2 + ... + |\alpha_{1n}|^2$$

מכיוון שקיים שוויון בין שני הביטויים הנ"ל, נקבל כי:

$$|\alpha_{11}|^2 = |\alpha_{11}|^2 + ... + |\alpha_{1n}|^2$$
$$\Downarrow$$
$$|\alpha_{12}|^2 + ... + |\alpha_{1n}|^2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_{12} = ... = \alpha_{1n} = 0$$

נמשיך באותו אופן עבור שאר השורות ונקבל שרק איברי האלכסון אינם מתאפסים. $\boxtimes$ (למה 2)

למה 3: תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של ממ"פ V. נניח כי T נורמלית. אם B בסיס אורתונורמלי של V אז גם מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא מטריצה נורמלית.

הוכחת למה 3: נתון כי T נורמלית, כלומר $TT^*=T^*T$.

נייצג את השוויון הנ"ל לפי בסיס B ונקבל:

$$[TT^*]_B=[T^*T]_B\Rightarrow [T]_B[T^*]_B=[T^*]_B[T]_B$$

מכיוון ש־B אורתונורמלי נקבל:

$$[T]_B([T]_B)^*=([T]_B)^*[T]_B$$

ולכן $[T]_B$ אכן נורמלית. $\boxtimes$ (למה 3)

הוכחת המשפט: נתון כי $T:V\to V$ נורמלית ו־$P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.

לפי למה 1 ל־T קיים בסיס אורתונורמלי משלש B^*, נסמן $A=[T]_{B^*}$ אז A משולשית עליונה.

לפי למה 3 A היא מטריצה נורמלית.

קיבלנו כי A נורמלית ומשולשית עליונה ועל כן לפי למה 2 A אלכסונית.

כלומר, קיים בסיס אורתונורמלי B^* שבו מטריצת הייצוג $A=[T]_{B^*}$ הינה אלכסונית, ולכן T לכסינה אוניטרית. $\blacksquare$

11 ליכסון של תבניות בילינאריות סימטריות/ריבועיות

משפט 11.1 תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית של מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה F($charF\neq 2$) , אז קיים בסיס B של V שבו $q(v)=q(t_1,...,t_n)=\beta_1t_1^2+....+\beta_nt_n^2$.
כאשר $\beta_i\in F$ ו־ $[v]_B=(t_1,..,t_n)$.

הוכחה: נניח כי בבסיס B של V התבנית הנתונה נראית כך: $q(v)=q(x_1,...,x_n)=x^tAx$.

כאשר $A=[q]_b=(\alpha_{ij})$ ו־ $[v]_B=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x$.

כלומר, $q(v)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}x_ix_j$ כאשר מתקיים כי $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ (מטריצת ייצוג של תבנית ריבועית היא סימטרית).

אם $\alpha_{ij} = 0$ לכל $1 \le i, j \le n$ אז $q = 0$ ולכן בכל בסיס B של V מקבלים $[q]_B = 0$. לכן נניח קיים (i, j) כך ש־ $\alpha_{ij} \neq 0$.

<u>צעד 1:</u>

מקרה 1: $\alpha_{11} \neq 0$, נקבץ יחס את המונומים בהם מופיע x_1, נקבל:

$$q(x_1, .., x_n) = (\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + ... + 2\alpha_{1n}x_1x_n) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$$

נסמן:

$$x_1' = (\alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n),\ x_2' = x_2, ..., x_n' = x_n'$$

ואז נקבל :

$$q(v) = q(x_1', ..., x_n') = \frac{1}{\alpha_{11}}(x_1')^2 + g(x_2', .., x_n')$$

כאשר $g(x_2', .., x_n')$ פונקציה ריבועית.

מקרה 2: $\alpha_{11} = 0$ אבל $\alpha_{ii} \neq 0$ עבור $2 \le i \le n$ כלשהוא.

במקרה זה נגדיר:

$$x_1' = x_i,\ x_i' = x_1$$
$$x_j' = x_j \qquad j \neq i, 1$$

ואז נוכל לפעול כמו במקרה 1 בבסיס החדש.

מקרה 3: $\alpha_{11} = \alpha_{22} = ... = \alpha_{nn} = 0$.

הנחנו כי קיים (i, j) כך ש־$\alpha_{ij} \neq 0$, נניח בה"כ כי $\alpha_{12} \neq 0$.

נגדיר:

$$x_1' = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad x_2' = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)$$
$$x_3' = x_3, ..., x_n' = x_n$$

ונקבל: $\alpha_{12}x_1x_2 = \alpha_{12}(x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = \alpha_{12}(x_1')^2 - \alpha_{12}(x_2')^2$

כלומר בבסיס החדש $\alpha_{11}' = \alpha_{12} \neq 0$, נוכל עתה להמשיך כמו במקרה 1.

<u>צעד i, $2 \le i \le n$:</u>

אחרי החלפות משתנים קיבלנו:

$$q(v) = q(y_1, .., y_n) = \beta_1 y_1^2 + ... + \beta_{i-1}y_{i-1}^2 + h(y_i, .., y_n)$$

כאשר $h(y_i,..,y_n)$ פונקציה ריבועית, לכן נוכל לפעול לגביה כמו בצעד 1 אך עבור משתנה y_i ואז לאחר החלפת משתנים, נקבל:

$$q(v)=q(z_1,...,z_n)=\beta_1 z_1^2+...+\beta_i z_i^2+k(z_{i+1},...,z_n)$$

כאשר z פונקציה ריבועית. נמשיך באותו אופן עד שנגיע לצורה האלכסונית. ■

12 משפט ההתמדה של סילבסטר

משפט 12.1 הי Vמרחב וקטורי סוף מימד ממשי. תהי $q:V\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית. נניח B,B' בסיסים סדורים של V בהם מטריצות הייצוג $[q]_B$ ו־$[q]_{B'}$ הינן אלכסוניות.

אזי מספרי האיברים החיוביים והשליליים בשתי מטריצות הייצוג הנ"ל שווים אלה לאלה, בהתאמה.

הוכחה: נתונים שני בסיסים סדורים של V $B=(v_1,...,v_n)$ ו־ $B'=(w_1,...,w_n)$.

בלי הגבלת הכלליות ועל ידי שינוי סדר הוקטורים בבסיסים, אם צריך, ניתן להניח כי:

$$[q]_B=\mathrm{diag}(\underbrace{1,....,1}_{\pi},\underbrace{-1,...,-1}_{\rho-\pi},0,....,0)$$

$$[q]_{B'}=\mathrm{diag}(\underbrace{1,....,1}_{\pi'},\underbrace{-1,...,-1}_{\rho'-\pi'},0,....,0)$$

עלינו להראות כי $\pi=\pi'$ וכי $\rho=\rho'$.

כיוון ש־$\rho=rk([q]_B)$ ו־ $\rho'=rk([q]_{B'})$ והמטריצות $[q]_B,[q]_{B'}$ חופפות ולכן יש להן אותה דרגה, נובע כי $\rho=\rho'$.

נותר להראות כי $\pi=\pi'$.

אם נרשום:

$$[v]_B=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad [v]_{B'}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

אזי:

$$q(v)=x_1^2+...+x_\pi^2-x_{\pi+1}^2-...-x_\rho^2$$
$$q(v)=y_1^2+....+y_{\pi'}^2-y_{\pi'+1}^2-...-y_\rho^2$$

נגדיר שני תתי מרחבים של V באופן הבא:

$$S=\mathrm{sp}\{v_1,...,v_\pi\}\quad T=\mathrm{sp}\{w_{\pi'+1},...,w_n\}$$

אם $v\in S$ אז $v\in\mathrm{sp}\{v_1,..,v_\pi\}$, כלומר $v=\sum_{i=1}^{\pi}x_iv_i$.

לכן $q(v) = x_1^2 + ... + x_\pi^2$, כלומר $q(v) > 0$ עבור כל $0 \neq v \in S$.
באופן דומה, אם $v \in T$, אזי $v = \sum_{i=\pi'+1}^{n} y_i w_i$ ולכן $q(v) = -y_{\pi'+1}^2 - ... - y_\rho^2$. כלומר $q(v) \leq 0$, עבור כל $v \in T$.

לכן נובע בהכרח כי $S \cap T = \{0\}$ ומכאן $\dim S + \dim T \leq \dim V = n$.
כלומר,

$$\pi + (n - \pi') \leq n \Rightarrow \pi \leq \pi'$$

משיקולי סימטריה נובע כי גם $\pi \leq \pi'$, לכן $\pi = \pi'$ ו־$\rho = \rho'$. ■