מיקום

יהי R חוג(עם יחידה, לא בהכרח קומוטטיבי), ו$S \subseteq Z(R)$ קבוצה.
נבנה חוג $Q \supseteq R$ שבו חברי S הפיכים.

נניח שקיים חוג כזה. אז איברי S הם רגולרים($s \in S$) רגולרי אם $\begin{matrix} sx = 0 \Rightarrow x = 0 \\ xs = 0 \Rightarrow x = 0 \end{matrix}$

- כלומר s לא מחלק אפס)

הוכחה

נניח $ax = 0$, אז $x = a^{-1}ax = a^{-1} \cdot 0 = 0$ כאשר $a^{-1} \in Q$.

הערה

מכפלה של איברים הפיכים היא איבר הפיך.

סיכום

R חוג כלשהו. $S \subseteq Z(R)$ קבוצה סגורה לכפל של איברים רגולריים, $1 \in S$.

מטרה

לבנות חוג המכיל את R שבו איברי R הפיכים.
נגדיר יחס שקילות על $S \times R$ כך:

$$\begin{gathered} (s,a) \sim (s',a') \\ \Updownarrow \\ s'a = sa' \end{gathered}$$

תרגיל: להוכיח שזה יחס שקילות

הערה: זה לא עובד אם איברי S לא רגולרים(למרות שיש דרך אחרת שכן עובדת)

את מחלקות השקילות נסמן $[(s,a)] := s^{-1}a$(זה $\frac{a}{s}$). נסמן

$$S^{-1}R = \left\{ s^{-1}a \middle| \begin{array}{c} s \in S \\ a \in R \end{array} \right\} = {}^{\mathrm{S\times R}}/_{\sim}$$

נגדיר על $S^{-1}R$ פעולת חיבור

$$s^{-1}a + s'^{-1}a' = (ss')^{-1}(s'a + sa')$$

צריך לבדוק שהפעולה מוגדרת היטב! כלומר ש$s^{-1}a = s_1^{-1}a_1 \Leftrightarrow s_1a = sa_1$) **תרגיל:** לבדוק.

הפעולה: קומוטטיבית $\surd$
אסוציאטיבית - תרגיל

הערה: נסמן $0 = 1^{-1}0$. כל האיברים $s^{-1}0$ שווים זה לזה.

$$s^{-1}a + 1^{-1}0 = (s \cdot 1)^{-1} \cdot (1 \cdot a + 0 \cdot s) = s^{-1}a$$

יש נגדי: $-\left(s^{-1}a\right) = s^{-1}(-a)$

הוכחנו: $\left(S^{-1}R, +, 0\right)$ חבורה אבלית

הגדרת הכפל

$$s^{-1}a \cdot s'^{-1}a' = (ss')^{-1} \cdot (aa')$$

צריך לבדוק שהפעולה מוגדרת היטב.
הפעולה אסוציאטיבית.
האיבר $s^{-1} \cdot s = 1^{-1} \cdot 1 = 1$ הוא איבר יחידה.
בדיקה נוספת: דיסטריביטיביות.

בנינו: $\left(S^{-1}R; +, \cdot; 0, 1\right)$ חוג.

נגדיר הומומורפיזם $R \xrightarrow{\varphi} S^{-1}R$ לפי $a \mapsto 1^{-1}a$. נבדוק שזה הומומורפיזם:

$$\varphi(a+b) = 1^{-1}(a+b)$$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = 1^{-1}a + 1^{-1}b = (1 \cdot 1)^{-1}(1 \cdot a + 1 \cdot b) = 1^{-1}(a+b)$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(B) = 1^{-1}a \cdot 1^{-1}b = (1 \cdot 1)^{-1}(ab) = 1^{-1}(ab) = \varphi(ab)$$

$$\varphi(1) = 1^{-1}1 = 1 \in S^{-1}R$$

נחשב את הגרעין של φ: לאיזה $a \in R$,

$$\varphi(a) = 1^{-1}a = 0 = 1^{-1}0$$

$$\Downarrow$$

$$(1, a) \sim (1, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$a = 1 \cdot a = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\ker \varphi = \{0\} \lhd R$$

ולכן φ חח"ע. אפשר לזהות את R עם התמונה $\varphi(R)$ וכך $R \cong \varphi(R) \subseteq S^{-1}R$.

נניח $s \in S$. $\varphi(s) = 1^{-1} \cdot s \left(= \frac{s}{1}\right)$.

$$1^{-1}s \cdot s^{-1}1 = (1 \cdot s)^{-1}(s \cdot 1) = s^{-1}s = 1$$

לכן כל איברי S הפיכים בחוג החדש.

מעכשיו נסמן $s^{-1}a = \frac{a}{s}$.

דוגמה

$$S = \left\{2^i\right\} \qquad R = \mathbb{Z}$$

$$S^{-1}R = \left\{\frac{n}{2^i}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

דוגמה דומה

$$S = \left\{4^i\right\} \qquad R = \mathbb{Z}$$

$$S^{-1}R = \left\{\frac{n}{4^i}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

$\Leftarrow$ הצלחנו להפוך את 2 למרות ש$2 \notin S$

המשימה הבאה

להבין את הקשר בין אידיאלים של A לאידיאלים של $S^{-1}A$

הערה

לכל $A \lhd S^{-1}R$,

$$\left\{a \in R \middle| \frac{a}{1} \in A\right\} = A \cap R \lhd R$$

$$6\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$$

$$6\mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\right) \lhd \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$3\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$$

$$3\mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\right) \lhd \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$$

הערה

יהי $I \lhd R$. נבנה $S^{-1}I = \left\{\frac{a}{s} \middle| \begin{array}{c} a \in I \\ s \in S \end{array}\right\}$. זהו אידאל של $\boxed{S^{-1}R}$.

הוכחה

$S^{-1}I \neq \emptyset$ כי $\frac{0}{1} \in S^{-1}I$.

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{sa' + s'a}{ss'} \in S^{-1}I$$

$sa' \in I$ כי I אידאל.

$s'a \in I$ - חיסור $-\frac{a}{s} = \frac{-a}{s}$.

לגבי כפל: נניח $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$

$$\frac{x}{s'} \in S^{-1}R$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{x}{s'} = \frac{ax}{s \cdot s'} \in S^{-1}I$$

לכן יש העתקות בין אידאלים של $S^{-1}R$ לאידאלים של R($I \mapsto S^{-1}I$) וגם בכיוון ההפוך($A \to A \cap R$).

טענה

אם $S^{-1}R \lhd A \neq 0$ אז $R \cap A \neq 0$

הוכחה

לפי ההנחה $A \ni \frac{a}{s} \neq 0$ כאשר $s \in S, 0 \neq a \in R$.

$$0 \neq \frac{a}{1} \in A \cap R \Leftarrow \frac{a}{1} = \frac{sa}{s} = \frac{s}{1} \cdot \overbrace{\frac{a}{s}}^{\in I} \in A$$

טענה

1. אם $I \lhd R$ ו$I \cap S = \emptyset$ אז $S^{-1}I \underset{\neq}{\lhd} S^{-1}R$
2. אם $A \lhd S^{-1}R$ אז $S \cap A = S \cap (A \cap R) = \emptyset$

הוכחה

1. צריך להוכיח ש$1 \notin S^{-1}I$, כלומר לא קיימים $\begin{matrix} a \in I \\ s \in S \end{matrix}$ כך ש-$\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. כלומר לא קיים $S \cap I \ni s$ - אבל זה הנתון.
2. נראה שאם $S \cap A \neq \emptyset$ אז $A = S^{-1}R$.

אם $S \cap A \neq \emptyset$ אז יש $s \in S \cap A$ ואז $\frac{s}{1} \in A \Leftarrow \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \in A \Leftarrow 1 = \frac{1}{1} = A$ לא אמיתי.

הערה

אם $I \cap S \neq \emptyset$ אז $S^{-1}I = S^{-1}R$ לפי 2.

טענה

לכל $A \lhd S^{-1}R$, $S^{-1}(R \cap A) = A$

מסקנה

- $\leftarrow$ חח"ע
- $\rightarrow$ על

הוכחת הטענה

יהי $A \lhd S^{-1}R$. ברור ש$A \cap R \subseteq A$ ולכן $S^{-1}(A \cap R) \subseteq S^{-1}A = A$

בכיוון ההפוך יהי $\frac{a}{s} \in A$ כאשר $s \in S, a \in R$.

$$R \ni \frac{a}{1} = \frac{sa}{1 \cdot s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in A$$

כלומר $\frac{a}{1} \in A \cap R$ לכן $\frac{a}{s} \in s^{-1}(A \cap R)$.