

תרגיל

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ אי פריק, שדה הפיצול E/\mathbb{Q} .
הראו שאם ${}^1\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = Q_8$ אזי $\deg f = 8$.

הוכחה - פתרון 1

הוספת שורש של f לשדה \mathbb{Q} תיתן הרחבה שדרגתה מחלקת את $|\text{Gal}(E/\mathbb{Q})| = [E:F]$.
 $|Q_8| = 8$. לכן דרגת הפולינום מחלקת את 8 \iff דרגת $f(x)$ היא 1, 2, 4, 8.

- 1 לא ייתכן, כי $f(x)$ אי פריק.
- 2 לא ייתכן כי כל הרחבה מסדר 2 היא הרחבת גלואה (מעל מאפיין $2 \neq$).
- 4 - אז $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ פועלת כתת־חבורה של S_4 על שורשי $f(x)$. (בעזרת מספר נימוקים שונים ניתן לראות ל Q_8 לא תת־חבורה של S_4).

פתרון 2

נראה שלא ניתן לשכן את Q_7 ב S_7 . אם $\deg f \leq 7$ אזי $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ פועלת על שורשי f ומשוכנת ב S_7 .

אם Q_8 משוכנת ב S_7 אז היא פועלת על $A = \{1, \dots, 7\}$. יהי $a \in A$.

$$7 \geq |O(a)| = [Q_8 : \text{St}(a)] = \frac{|Q_8|}{|\text{St}(a)|} = \frac{8}{|\text{St}(a)|}$$

$$|\text{St}(a)| \geq \frac{8}{7} > 1$$

$$\text{St}(a) \leq Q_8$$

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$$

$-1 \iff i^2 = j^2 = k^2 = -1$ שייך לכל המייצבים \iff פועל טריוויאלית על A , אבל אף איבר של S_7 לא פועל טריוויאלית חוץ מהזהות. והגענו לסתירה.



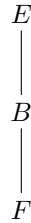
הגדרה

E/F היא הרחבת גלואה אם היא שדה פיצול של פולינום ספרבילי (כל השורשים של הפולינום שונים).

Q_8^1 הוא שדה הקוורטרניונים

משפט 1

אם E/F הרחבת גלואה ויש שדה ביניים B :



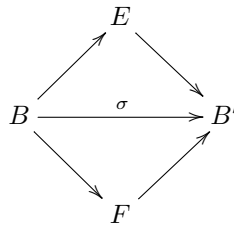
• אם B/F גם הרחבת גלואה אזי

$$\text{Gal}(E/B) \triangleleft \text{Gal}(E/F)$$

ומתקיים

$$\text{Gal}(B/F) \cong \text{Gal}(E/F)/\text{Gal}(E/B)$$

• אם B/F לא גלואה



סימון

בהנתן חבורות $H_1, H_2 \leq G$ נסמן $H_1 \vee H_2$ להיות התת-חבורה של G שהיא חיתוך של כל תתי החבורות של G שמכילות את H_1, H_2 .

משפט 2

E/F גלואה, $F \subseteq B, C \subseteq E$ שדות ביניים.

1. $\text{Gal}(E/B) \vee \text{Gal}(E/C) \simeq \text{Gal}(E/B \cap C)$

2. $\text{Gal}(E/B) \cap \text{Gal}(E/C) \simeq \text{Gal}(E/B \vee C)$

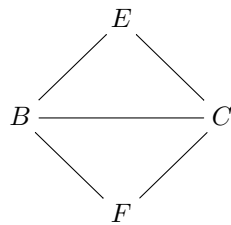
תרגיל

1. מכפלה של שני פולינומים שונים ומתוקנים אי-פריקים ספרבייליים מעל F היא ספרבילית. (אם יש שורש משותף ל f, g והם אי-פריקים מתוקנים אזי $f = g$ כי הם הפולינום המינימלי)

2. מכפלה של פולינומים שונים, מתוקנים, אי-פריקים וספרבייליים. נסמן E, B, C שדות הפיצול של f, g, h בהתאמה.

$$B \cap C = F \text{ אם}$$

$$\text{Gal}(E/F) \simeq \text{Gal}(B/F) \times \text{Gal}(C/F)$$



פתרון

$$\begin{aligned} \text{Gal}(E/B) \cap \text{Gal}(E/C) &\simeq \text{Gal}(E/B \vee C) = \text{Gal}(E/E) = \{id\} \\ \text{(השוויון } \text{Gal}(E/B \vee C) = \text{Gal}(E/E) \text{ הוא בגלל ש } B \vee C \text{ הוא שדה פיצול של } f(x)\text{)} \\ \text{Gal}(E/C) \vee \text{Gal}(E/C) &\cong \text{Gal}(E/B \cap C) = \text{Gal}(E/F) \end{aligned}$$

תזכורת: היה משפט בתורת החבורות: עבור $H, K \leq G$, אם $HK = G, H \cap K = \{e\}$ אזי $G \cong H \times K$ ו $HK \triangleleft G$.

למה? לפי משפט 1 כי B, C הן הרחבות גלואה.

$$\text{Gal}(E/F) \simeq \text{Gal}(E/B) \times \text{Gal}(E/C)$$

נשתמש בעוד משפט מתורת החבורות: אם $G = H \times K$ אזי $G/H \simeq K$. לפי משפט 1:

$$\text{Gal}(E/F)/\text{Gal}(E/B) \simeq \text{Gal}(E/C)$$

בצורה דומה:

$$\text{Gal}(C/F) \simeq \text{Gal}(E/B) \implies \text{Gal}(E/F) = \text{Gal}(C/F) \times \text{Gal}(B/F)$$

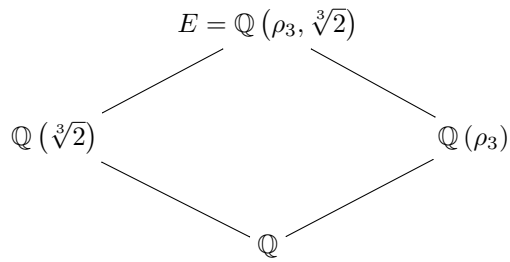
דוגמה נגדית לחלק 2 של התרגיל כאשר $C \cap B \neq F$

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{m_{\sqrt{2}}=x^2-2}, \quad \underbrace{\sqrt{2}+1}_{m_{\sqrt{2}+1}=x^2-2x-1} \in \mathbb{Q}$$

שדה הפיצול של $m_{\sqrt{2}} \cdot m_{\sqrt{2}+1}$ הוא $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. חבורת גלואה E/\mathbb{Q} היא \mathbb{Z}_2 .

$$\mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ניזכר שעבור $x^3 - 2$,



$$\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

המשפט לא מתקיים כי תת השדות הם לא שדות פיצול.