תרגיל

$f\left(x\right)\in\mathbb{Q}\left[x\right]$ אי פריק, $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול.
הראו שאם $\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)=Q_8$ [1] אזי $\deg f=8$.

הוכחה - פתרון 1

הוספת שורש של f לשדה $\mathbb{Q}$ תיתן הרחבה שדרגתה מחלקת את $\left[E:F\right]=\left|\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)\right|=\left|Q_8\right|=8$. לכן דרגת הפולינום מחלקת את $8 \Longleftarrow$ דרגת $f\left(x\right)$ היא $1,2,4,8$.

- 1 לא ייתכן, כי $f\left(x\right)$ אי פריק.
- 2 לא ייתכן כי כל הרחבה מסדר 2 היא הרחבת גלואה(מעל מאפיין $\neq 2$)
- 4 - אז $\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ פועלת כתת־חבורה של S_4 על שורשי $f\left(x\right)$.(בעזרת מספר נימוקים שונים ניתן לראות לQ_8 לא תת־חבורה של S_4)

פתרון 2

נראה שלא ניתן לשכן את Q_7 בS_7. אם $\deg f\leq 7$ אזי $\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$ פועלת על שורשי f ומשוכנת בS_7.
אם Q_8 משוכנת בS_7 אז היא פועלת על $A=\left\{1,\ldots 7\right\}$. יהי $a\in A$.

$$7\geq\left|O\left(a\right)\right|=\left[Q_8:\mathrm{St}\left(a\right)\right]=\frac{\left|Q_8\right|}{\left|\mathrm{St}\left(a\right)\right|}=\frac{8}{\left|\mathrm{St}\left(a\right)\right|}$$

$$\left|\mathrm{St}\left(a\right)\right|\geq\frac{8}{7}>1$$

$$\mathrm{St}\left(a\right)\leq Q_8$$

$$\pm1,\pm i,\pm j,\pm k$$

$i^2=j^2=k^2=-1 \Longleftarrow -1$ שייך לכל המייצבים $\Longleftarrow$ פועל טריוויאלית על A, אבל אף איבר של S_7 לא פועל טריוויאלית חוץ מהזהות. והגענו לסתירה.

■

הגדרה

E/F היא הרחבת גלואה אם היא שדה פיצול של פולינום ספרבילי(כל השורשים של הפולינום שונים).

---

[1] Q_8 הוא שדה הקווטרניונים

משפט 1

אם E/F הרחבת גלואה ויש שדה ביניים B:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dash] \\ B \arrow[d, dash] \\ F \end{tikzcd}$$

- אם B/F גם הרחבת גלואה אזי

$$\mathrm{Gal}\left(E/B\right) \lhd \mathrm{Gal}\left(E/F\right)$$

ומתקיים

$$\mathrm{Gal}\left(B/F\right) \cong {}^{\mathrm{Gal}(E/F)}/_{\mathrm{Gal}(E/B)}$$

- אם B/F לא גלואה

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr] & \\ B \arrow[ur] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] & & B' \\ & F \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

סימון

בהנתן חבורות $H_1, H_2 \leq G$ נסמן $H_1 \vee H_2$ להיות התת־חבורה של G שהיא חיתוך של כל תתי החבורות של G שמכילות את H_1, H_2.

משפט 2

E/F גלואה, $F \subseteq B, C \subseteq E$ שדות ביניים.

1. $\mathrm{Gal}\left(E/B\right) \vee \mathrm{Gal}\left(E/C\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(E/B \cap C\right)$
2. $\mathrm{Gal}\left(E/B\right) \cap \mathrm{Gal}\left(E/C\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(E/B \vee C\right)$

תרגיל

1. מכפלה של שני פולינומים שונים ומתוקנים אי־פריקים ספרביליים מעל F היא ספרבילית.

   (אם יש שורש משותף לf,g והם אי־פריקים מתוקנים אזי $f=g$ כי הם הפולינום המינימלי)

2. $\overbrace{f(x)}^{\in F[x]} = \overbrace{g(x)}^{\in F[x]}\overbrace{h(x)}^{\in F[x]}$ מכפלה של פולינומים שונים, מתוקנים, אי־פריקים וספרביליים.
   נסמן E,B,C שדות הפיצול של f,g,h בהתאמה.

   אם $B\cap C=F$

$$\mathrm{Gal}\left(E/F\right)\simeq \mathrm{Gal}\left(B/F\right)\times \mathrm{Gal}\left(C/F\right)$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
B \arrow[rr, no head] \arrow[dr, no head] & & C \arrow[dl, no head] \\
 & F &
\end{tikzcd}$$

פתרון

$$\mathrm{Gal}\left(E/B\right)\cap \mathrm{Gal}\left(E/C\right)\simeq \mathrm{Gal}\left(E/B\vee C\right)=\mathrm{Gal}\left(E/E\right)=\{id\}$$

(השוויון $\mathrm{Gal}\left(E/B\vee C\right)=\mathrm{Gal}\left(E/E\right)$ הוא בגלל ש$B\vee C$ הוא שדה פיצול של$f(x)$)

$$\mathrm{Gal}\left(E/C\right)\vee \mathrm{Gal}\left(E/C\right)\cong \mathrm{Gal}\left(E/B\cap C\right)=\mathrm{Gal}\left(E/F\right)$$

תזכורת: היה משפט בתורת החבורות: עבור $H,K\le G$, אם $H\cap K=\{e\}$, $HK=G$ ו$HK\lhd G$ אזי $G\cong H\times K$.

$\mathrm{Gal}\left(E/B\right),\mathrm{Gal}\left(E/C\right)\lhd \mathrm{Gal}\left(E/F\right)$. למה? לפי משפט 1 כי B,C הן הרחבות גלואה.

$$\mathrm{Gal}\left(E/F\right)\simeq \mathrm{Gal}\left(E/B\right)\times \mathrm{Gal}\left(E/C\right)$$

נשתמש בעוד משפט מתורת החבורות: אם $G=H\times K$ אזי $G/H\simeq K$.
לפי משפט 1:

$$\mathrm{Gal}(E/F)/\mathrm{Gal}(E/B)\simeq \mathrm{Gal}\left(E/C\right)$$

בצורה דומה:

$$\mathrm{Gal}\left(C/F\right)\simeq \mathrm{Gal}\left(E/B\right)\implies \mathrm{Gal}\left(E/F\right)=\mathrm{Gal}\left(C/F\right)\times \mathrm{Gal}\left(B/F\right)$$

דוגמה נגדית לחלק 2 של התרגיל כאשר $C \cap B \neq F$

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{m_{\sqrt{2}}=x^2-2} \quad , \quad \underbrace{\sqrt{2}+1}_{m_{\sqrt{2}+1}=x^2-2x-1} \quad \in \mathbb{Q}$$

שדה הפיצול של $m_{\sqrt{2}} \cdot m_{\sqrt{2}+1}$ הוא $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. חבורת גלואה $E/\mathbb{Q}$ היא $\mathbb{Z}_2$.

$$\mathbb{Z}_2 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

ניזכר שעבור x^3-2,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E = \mathbb{Q}\left(\rho_3, \sqrt[3]{2}\right) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}\left(\rho_3\right) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Gal}\left(E/\mathbb{Q}\right)$$

המשפט לא מתקיים כי תת השדות הם לא שדות פיצול.