פתרון תרגיל בית 7 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א׳ תש״ף

שאלה 1. נבחן מתי חבורה ניתנת להצגה כמכפלה ישרה של חבורות ולהיפך.

א. קבעו ונמקו מי מהחבורות הבאות מסדר 54 איזומורפיות זו לזו:

$$\mathbb{Z}_{54}, \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$$

ב. בתרגיל בית קודם הוכחתם שחבורת הארבעה של קליין V והחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ איזומורפיות זו לזו. הוכיחו זאת כעת בפשטות בעזרת מכפלה ישרה פנימית.

ג. קבעו ונמקו האם החבורות S_4 ו-$\mathbb{Z}_2 \times A_4$ איזומורפיות זו לזו?

פתרון.

א. החבורות הן לא איזומורפיות. בחבורה $\mathbb{Z}_{40}$ יש איבר מסדר 40, ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4$ הסדר המירבי של איבר הוא 20.

ב. החבורות איזומורפיות. אפשר לראות ששתיהן ציקליות, למשל $\mathbb{Z}_{33} = \langle 1 \rangle$ ו-$\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_3 = \langle (1,1) \rangle$, ואנחנו יודעים שמכל סדר יש רק חבורה ציקלית אחת עד כדי איזומורפיזם. בכיתה הראנו איזומורפיזם בין חבורות כאלו, ספציפית

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{33} &\to \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_3 \\ x &\mapsto (x \,(\mathrm{mod} 11), x \,(\mathrm{mod} 3)) \end{aligned}$$

ג. החבורות לא איזומורפיות. ראינו בכיתה שהסדרים האפשריים של איברים ב-S_4 הם $1, 2, 3, 4$. בחבורה $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ יש איברים מסדר 6, כמו למשל $(1, (123))$. למי שהחישוב אינו ברור, הזכרו מה הוא הסדר של איבר במכפלה קרטזית.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$ ת״ח פשוטה מאינדקס 2. הוכיחו כי או ש-H היא תת החבורה הנורמלית האמיתית היחידה של G (כלומר ת״ח לא טריוויאלית),
או שקיימת $K \lhd G$ מסדר 2, כך ש-$G \cong H \times K$. רמז: משפט האיזומורפיזם השני.

פתרון. נניח ש-H אינה תת החבורה הנורמלית האמיתית היחידה של G (אחרת סיימנו) ונוכיח שקיימת $K \lhd G$ מסדר 2, כך ש-$G \cong H \times K$.

בעיקרון צריך לטפל בכל המקרים שבהם ההנחה מתקיימת: כאשר H אינה ת״ח נורמלית, כאשר אינה אמיתית וכאשר אינה יחידה. בפועל רק המקרה האחרון מעניין.

המקרה הראשון לא מתקיים אף פעם (למה?). המקרה השני מתקיים רק אם G מסדר 2 ו-$H = \{e\}$ (למה?), ואז נבחר $K = G$ ונקבל ש-$G \cong H \times K$ כדרוש.

אם כן, נניח שמדובר במקרה האחרון, כלומר: H היא ת״ח נורמלית אמיתית של G אך לא יחידה, יש עוד ת״ח נורמלית אמיתית $H \neq K \lhd G$.

כיוון ש-$H, K \lhd G$, גם $H \cap K \lhd G$ (זה נכון גם רק אם אחת מהן ת״ח נורמלית של G), אך מאחר ש-H פשוטה, נובע ש-$H \cap K = H$ או ש-$H \cap K = \{e\}$.

במקרה הראשון: $H \cap K = H \Leftarrow H \subseteq K \Leftarrow H \lhd K \lhd G \Leftarrow [G:H] = [G:K] \cdot [K:H] = 2$ לפי כפליות האינדקס (שנכונה ללא קשר לנורמליות) והנתון.

אחד האינדקסים חייב להיות 1 והשני 2, לכן או ש-$K = G$, בסתירה לכך שהיא ת"ח אמיתית, או ש-$K = H$, בסתירה לכך שהן שונות. לכן המקרה השני מתקיים: $H \cap K = \{e\}$.

כעת נתבונן ב-HK. מתקיים: $H \lhd HK \lhd G$. שוב לפי כפליות האינדקס והנתון, $[G:H] = [G:HK] \cdot [HK:H] = 2$, לכן אחד האינדקסים חייב להיות 1 והשני 2, כלומר: $G = HK$ או $HK = H$.

אם $HK = H$, אז לפי משפט האיזומורפיזם השני ומה שהוכחנו, מתקיים: $|K| = |K/\{e\}| = |K/(H \cap K)| = |HK/H| = |H/H| = 1$, כיוון שלחבורות איזומורפיות (וכמובן לשוות) יש אותו סדר.

זוהי סתירה לכך ש-K לא טריוויאלית, לכן $G = HK$. לפי אותם נימוקים, מתקיים: $|K| = |HK/H| = |G/H| = 2$, לכן K מסדר 2.

כמו כן, הראינו שמתקיימים כל התנאים לכך ש-G היא מכפלה ישרה פנימית של H, K (הן ת"ח נורמליות של G שמכפלתן היא כל G וחיתוכן $\{e\}$), ולכן לפי משפט, $G \cong H \times K$, כדרוש.

שאלה 3. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G) \lhd \operatorname{Aut}(G)$ (שזו ת"ח הוכחנו בתרגול). רמז: הראו כי $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_{\varphi(g)}$ לאיברים מתאימים.

ב. הוכיחו שאם $Z(G) = \{e\}$, אז $C_{\operatorname{Aut}(G)}(\operatorname{Inn}(G)) = \{\mathrm{id}\}$ ובפרט מתקיים $Z(\operatorname{Aut}(G)) = \{\mathrm{id}\}$.

פתרון.

(א) נעזר ברמז כדי להראות ש-$\operatorname{Inn}(G)$ סגורה להצמדה. יהי $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$ ויהי $\gamma_g \in \operatorname{Inn}(G)$. אז לכל $x \in G$ מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}(x) &= \varphi(\gamma_g(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(x) \cdot g^{-1}) = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(x) \cdot g^{-1}) \\ &= \varphi(g) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \cdot x \cdot \varphi(g)^{-1} = \gamma_{\varphi(g)}(x)\end{aligned}$$

ולכן $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_{\varphi(g)} \in \operatorname{Inn}(G)$.

(ב) יהי $\varphi \in C_{\operatorname{Aut}(G)}(\operatorname{Inn}(G))$, ונרצה להראות כי $\varphi = \mathrm{id}$. לפי הגדרה φ מתחלף עם כל אוטומורפיזם פנימי. כלומר $\varphi \circ \gamma_g = \gamma_g \circ \varphi$ לכל $g \in G$. נכפיל ב-φ^{-1} מימין ובעזרת הרמז מהסעיף הקודם נקבל

$$\begin{aligned}\gamma_{\varphi(g)} &= \varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_g \\ \gamma_g^{-1}\gamma_{\varphi(g)} &= \mathrm{id}\end{aligned}$$

ראינו בכיתה כי $\gamma_g^{-1} = \gamma_{g^{-1}}$ ולכן $\gamma_g^{-1}\gamma_{\varphi(g)} = \gamma_{g^{-1}\varphi(g)}$. כלומר לכל $x \in G$ מתקיים

$$\begin{aligned}\gamma_{g^{-1}\varphi(g)}(x) &= \mathrm{id}(x) \\ g^{-1}\varphi(g)x\left(g^{-1}\varphi(g)\right)^{-1} &= x \\ g^{-1}\varphi(g)x &= xg^{-1}\varphi(g)\end{aligned}$$

לכן $g^{-1}\varphi(g) \in Z(G)$, אך G חסרת מרכז לפי הנתון, ולכן $g^{-1}\varphi(g) = e$. כלומר $\varphi(g) = g$ לכל $g \in G$, או במילים אחרות $\varphi = \mathrm{id}$, כדרוש.

לסיום, המֶרְכָּז של חבורה הוא חיתוך כל המְרַכְּזִים, ולכן מוכל בכל אחד מהם. כלומר $Z(\operatorname{Aut}(G)) \subseteq C_{\operatorname{Aut}(G)}(\operatorname{Inn}(G)) = \{\mathrm{id}\}$ ולכן גם $Z(\operatorname{Aut}(G)) = \{\mathrm{id}\}$.

שאלה 4. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_n$. הוכיחו את הטענה השימושית שראינו בתרגול:

$$\sigma a \sigma^{-1} = \sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k) \sigma^{-1} = (\sigma (a_1), \sigma (a_2), \ldots, \sigma (a_k))$$

למשל, עבור $\sigma = (1\ 2)(4\ 5)$ ו-$a = (2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma (2\ 3\ 5\ 6) \sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 6)$$

רשות: נסו למצוא נוסחה עבור $\sigma a \sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי.

פתרון. שיוויון בין שתי פונקציות, כמו למשל התמורות בשאלה, אפשר להוכיח על ידי זה שנראה שכל קלט נשלח לאותו פלט בשתי הפונקציות. כלומר נבדוק לאן האיברים ב-$\{1, 2, \ldots, n\}$ מועתקים בשתי התמורות.

ראשית, נניח כי $m = \sigma (a_i)$ עבור איזשהו $1 \leq i \leq k$. התמורה באגף ימין תשלח את m ל-$\sigma (a_{i+1})$ כאשר האינדקס $i+1$ מחושב מודולו k. נסתכל מה קורה באגף שמאל:

$$\begin{aligned}\left(\sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k) \sigma^{-1}\right)(m) &= \sigma \left((a_1, a_2, \ldots, a_k) \left(\sigma^{-1} (\sigma (a_i))\right)\right) \\ &= \sigma ((a_1, a_2, \ldots, a_k)(a_i)) = \sigma (a_{i+1})\end{aligned}$$

ולכן התמורות פועלות אותו דבר על $\sigma (a_1), \ldots, \sigma (a_k)$. כעת נניח כי m אינו מהצורה $\sigma (a_i)$ לאף $1 \leq i \leq k$; לכן התמורה באגף ימין תשלח אותו לעצמו. לגבי אגף שמאל: נשים לב כי $\sigma^{-1}(m) \neq a_i$ לכל i, ולכן

$$\left(\sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k) \sigma^{-1}\right)(m) = \sigma \left((a_1, a_2, \ldots, a_k) \left(\sigma^{-1} (m)\right)\right) = \sigma \left(\sigma^{-1} (m)\right) = m$$

מכאן ששתי התמורות האלו שוות.

שאלה 5. נתבונן ב-S_n עבור $n > 2$. הוכיחו כי:

א. לכל מחזור $\mathrm{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma\tau \neq \tau\sigma$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

ב. החבורה S_n חסרת מֶרְכָּז, כלומר: $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$

ג. $\mathrm{Inn}(S_n) \cong S_n$.

ד. (רשות) מצאו אוטומורפיזם **לא** פנימי של החבורה $S_3 \times S_3$. רמז: נוח לחשוב על $S_3 \times S_3$ כתת־חבורה של S_6 ושם לחפש אוטומורפיזם.

פתרון.

א. נניח כי $\tau = (a_1, \ldots, a_k)$. נשים לב ש-$\sigma\tau = \tau\sigma$ אם ורק אם $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$. אז בעזרת השאלה הקודמת, נוכל למצוא σ כדרוש.
אם האורך של המחזור $k \geq 3$, אז נבחר $\sigma = (a_1, a_2)$ ונקבל

$$\begin{aligned}(a_1, a_2)(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)(a_1, a_2)^{-1} &= (\sigma (a_1), \sigma (a_2), \sigma (a_3), \ldots, \sigma (a_k)) \\ &= (a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k)\end{aligned}$$

מפני ש-τ שולח את a_1 ל-a_2 ואילו $\sigma\tau\sigma^{-1}$ שולח את a_1 ל-a_3, אז בודאי $\tau \neq \sigma\tau\sigma^{-1}$.
נותרנו עם המקרה שבו $k = 2$. כלומר $\tau = (a_1, a_2)$. מן הנתון $n > 2$, נסיק שקיים $b \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, a_2\}$. נבחר $\sigma = (a_1, b)$ ונחשב

$$(a_1, b)(a_1, a_2)(a_1, b)^{-1} = (\sigma (a_1), \sigma (a_2)) = (b, a_2)$$

מפני ש-τ שולח את a_2 ל-a_1 ואילו $\sigma\tau\sigma^{-1}$ שולח את a_2 ל-$a_1 \neq b$, אז בודאי $\tau \neq \sigma\tau\sigma^{-1}$.

ב. המרכז הוא תת־חבורה, ולכן תמיד כולל את איבר היחידה. כלומר $\mathrm{id} \in Z(S_n)$. נניח בשלילה שקיימת תמורה $\mathrm{id} \neq \sigma \in Z(S_n)$, ויהי $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ פירוק שלה למכפלת מחזורים זרים.
אם $r = 1$, אז σ היא מחזור, וסיימנו לפי הסעיף הקודם שבו מצאנו תמורה שלא מתחלפת עם σ.
נניח $r > 1$ ושקיים בפירוק למחזורים זרים מחזור מאורך לפחות 3. בלי הגבלת הכלליות נניח σ_1 הוא מחזור מאורך $k \geq 3$ (כי מחזורים זרים מתחלפים, כלומר $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$). נסמן $\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_k)$. כמו בסעיף הקודם נבחר $\mu = (a_1, a_2)$, נשים לב כי μ מתחלף עם $\sigma_2, \ldots, \sigma_r$ ונחשב

$$\mu\sigma\mu^{-1} = \mu\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r\mu^{-1} = \mu\sigma_1\mu^{-1}\sigma_2 \ldots \sigma_r$$

נניח בשלילה כי $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma$, ונכפיל ב-$(\sigma_2 \ldots \sigma_r)^{-1}$ מימין ונקבל $\sigma_1 = \mu\sigma_1\mu^{-1}$, בסתירה לסעיף הקודם.
נותרנו רק עם המקרה שבו בפירוק של σ למחזורים זרים מופיעים רק חילופים (מחזורים מאורך 2). נניח $\sigma_1 = (a_1, a_2)$ ו-$\sigma_2 =$ עבור a_1, a_2, b_1, b_2 שונים (הבינו למה מקרה זה לא יקרה עבור $n = 3$). נבחר $\mu = (a_1, b_1)$ ונקבל

$$\mu\sigma\mu^{-1} = \mu\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \ldots \sigma_r\mu^{-1} = \mu\sigma_1\sigma_2\mu^{-1}\sigma_3 \ldots \sigma_r$$

כי μ מתחלף עם $\sigma_3, \ldots, \sigma_r$. נניח בשלילה כי $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma$, ונכפיל ב-$(\sigma_3 \ldots \sigma_r)^{-1}$ מימין ונקבל $\sigma_1\sigma_2 = \mu\sigma_1\sigma_2\mu^{-1}$, אבל

$$\mu\sigma_1\sigma_2\mu^{-1} = (a_1, b_1)(a_1, a_2)(b_1, b_2)(a_1, b_1) = (a_1, b_2)(a_2, b_1) \neq (a_1, a_2)(b_1, b_2)$$

וזו סתירה. בסך הכל קיבלנו כי $\sigma \notin Z(S_n)$. לכן $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.

ג. אנחנו יודעים כי $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ לפי הסעיף הקודם. לכן

$$\mathrm{Inn}(S_n) \cong S_n/Z(S_n) = S_n/\{\mathrm{id}\} \cong S_n$$

ד. נסמן $G = S_3 \times S_3$ ונבחר $\varphi \colon G \to G$ להיות

$$\varphi(a, b) = (b, a)$$

אנחנו רוצים להראות כי $\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \setminus \mathrm{Inn}(G)$ (אגב ל-G יש 36 אוטומורפיזמים לא פנימיים). קל לראות ש-φ על. לכן φ חח"ע, כי G סופית. זה אכן הומומורפיזם כי

$$\varphi(a_1, b_1)\varphi(a_2, b_2) = (b_1, a_1)(b_2, a_2) = (b_1b_2, a_1a_2) = \varphi(a_1a_2, b_1b_2)$$

למה הוא לא פנימי? אילו φ היה פנימי, אז היה איבר $(a, b) \in G$ כך ש-

$$\begin{aligned}\varphi((12), (12)) &= (a, b)((12), (12))(a, b)^{-1} = \left(a(12)a^{-1}, b(12)b^{-1}\right) \\ &= ((a(1), a(2)), (b(1), b(2))) = ((12), (12))\end{aligned}$$

לכן $a, b \in C_{S_3}((12)) = \{\mathrm{id}, (12)\}$. אם $a = b = \mathrm{id}$, אז $\varphi = \mathrm{id}_G$ ונקבל

$$\varphi((12), (13)) = ((a(1), a(2)), (b(1), b(3))) = ((12), (13))$$

ששונה מ-$((13), (12))$, כדרוש מהגדרת φ. אם $b = (12)$ ו-$a \in \{\mathrm{id}, (12)\}$, אז

$$\varphi((12), (13)) = ((a(1), a(2)), (b(1), b(3))) = ((12), (23))$$

ששונה מ-$((12),(13))$, כדרוש מהגדרת φ. אם $a=(12)$ ו-$b\in\{\mathrm{id},(12)\}$, אז

$$\varphi((13),(12)) = ((a(1),a(3)),(b(1),b(2))) = ((23),(12))$$

ששונה מ-$((13),(12))$, כדרוש מהגדרת φ. לכן φ אינו אוטומורפיזם פנימי.
אם חושבים על שיכון $S_3\times S_3\to S_6$ שבו הרכיב הראשון הוא של תמורות המקבעות את $\{4,5,6\}$ וברכיב השני תמורות המקבעות את $\{1,2,3\}$, אז φ שבחרנו הוא הצמדה בתמורה $(14)(25)(36)$, ששייכת למנרמל של G ב-S_6, אבל לא ל-G.

שאלה 6. הוכיחו כי:

א. לכל חבורה G, אם מחלקת הצמידות של $x\in G$ היא $\{a_1,...,a_k\}$, אז מחלקת הצמידות של x^{-1} היא $\{a_1^{-1},...,a_k^{-1}\}$.

ב. כל תמורה $\sigma\in S_n$ צמודה לתמורה ההופכית לה.

ג. לכל מחזור $\sigma\in S_n$ שאורכו n, המְרַכֵּז שלו הוא $\langle\sigma\rangle$ (תזכורת: מְרַכֵּז של איבר בחבורה הוא קבוצת האיברים בחבורה שמתחלפים איתו).

פתרון.

(א) a_i צמוד ל-x $\Leftrightarrow$ קיים $g\in G$ כך ש-$a_i=gxg^{-1}$ $\Leftrightarrow$ קיים $g\in G$ כך ש-$a_i^{-1}=(gxg^{-1})^{-1}=gx^{-1}g^{-1}$ $\Leftrightarrow$ a_i^{-1} צמוד ל-x.

(ב) לפי משפט, תמורות צמודות זו לזו אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים. לכל תמורה $\sigma\in S_n$ יש אותו מבנה מחזורים כמו להופכית שלה, דבר שניתן להוכיח בקלות ע"י פירוק למחזורים זרים והפיכת כל אחד מהם, ולכן הן צמודות.

(ג) כל איבר בחבורה מתחלף עם כל החזקות שלו (כמו שראינו בהוכחה שכל חבורה ציקלית היא אבלית) ולכן לכל $\sigma\in S_n$ מתקיים: $\langle\sigma\rangle\subseteq C_{S_n}(\sigma)$.
נותר להראות שאם σ מחזור שאורכו n, זהו שיוויון, כלומר: אין תמורות נוספות שמתחלפות עם σ. נסמן: $\sigma=(a_1\,a_2\,...\,a_n)$. תהי $\tau\in S_n$ תמורה כלשהי.
$\tau\sigma=\sigma\tau \Leftrightarrow \tau\sigma\tau^{-1}=\sigma \Leftrightarrow (\tau(a_1)\,\tau(a_2)\,...\,\tau(a_n))=(a_1\,a_2\,...\,a_n)$ לפי הטענה שבשאלה 4.
בגלל המעגליות, ניתן להציג את המחזור $(a_1\,a_2\,...\,a_n)$ ב-n דרכים שונות, מה שאומר שיש n אפשרויות לבחור את $\tau(a_1)$ כך שהשיוויון יתקיים, וזה כבר מגדיר את שאר ערכי τ.
לכן יש בדיוק n תמורות שמתחלפות עם σ, וכיוון ש- $|\langle\sigma\rangle|=n$, אלה כולן, כלומר: $C_{S_n}(\sigma)=\langle\sigma\rangle$.

שאלה 7. תהי G חבורה. הוכיחו כי לכל $a\in G$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים: $C_G(a)\leq C_G(a^n)$.

פתרון. ידוע שמרכז הוא תמיד חבורה, לכן מספיק להוכיח שמתקיימת הכלה. נחלק למקרים:
אם $n=0$, אז $C_G(a^n)=C_G(e)=G$ ולכן ברור ש-$C_G(a)\subseteq C_G(a^n)$.
אם $n>0$, יהי $b\in C_G(a)$, אז $ba=ab$ (כלומר: a,b מתחלפים), ולכן $ba^n=b\cdot a\cdot ...\cdot a=a\cdot ...\cdot a\cdot b=a^nb$, אז: $b\in C_G(a^n)$. ומתקיים: $C_G(a)\subseteq C_G(a^n)$.
אם $n<0$, אז $n=-m$ עבור $m>0$. יהי $b\in C_G(a)$, אז $ba=ab$, ולכן $ba^{-1}=a^{-1}b$ (למה?). מכאן ש-$b\in C_G(a^{-1})$ ומתקיים: $C_G(a)\subseteq C_G(a^{-1})$ (זה שיוויון כמובן).
כעת נסיק מהמקרה הקודם ש-$C_G(a^{-1})\subseteq C_G((a^{-1})^m)=C_G(a^{-m})=C_G(a^n)$.

שאלה 8. (רשות) שאלה לא קשה אך דורשת קצת קומבינטוריקה.

א. מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6.

ב. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6.

פתרון. האם אתם יודעים מהו הקשר של (איחוד של) מחלקות צמידות לשאלה?

א. כל תמורה ניתן להציג כמכפלת מחזורים זרים, והסדר של התמורה יהיה הכמ"מ (lcm) של אורכי המחזורים בהצגה זו. הסבירו מדוע ב-S_6 ניתן לקבל כמ"מ 6 בשני אופנים בדיוק: מחזורים מאורך 6 $(a_1, \ldots, a_6)$ שישנם $\binom{6}{6}(6-1)! = 5! = 120$ כאלו; ומכפלה של מחזור מאורך 3 עם חילוף $(a_1, a_2)\,(a_3, a_4, a_5)$ ויש $\binom{6}{2}\binom{6-2}{3}(3-1)! =$ 120 כאלו. בסך הכל יש 240 איברים מסדר 6.
ודאו שאתם מבינים את החישובים הקומבינטוריים לעיל ויודעים כיצד להגיע אליהם.

ב. באופן דומה לסעיף הקודם, כאן יהיו לנו שלושה סוגי איברים מסדר 2: חילופים, מכפלה של שני חילופים ומכפלה של שלושה חילופים. בסך הכל ישנם

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{2!} + \binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\frac{1}{3!} = 15 + 45 + 15 = 75$$

איברים מסדר 2 בחבורה S_6.

שאלה 9. (רשות) תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \,|\, \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו-τ הן זרות אם

$$\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$$

הוכיחו כי אם שני מחזורים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.
הדרכה: יהיו σ, τ שני מחזורים מתחלפים שאינם זרים. ראשית הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(\tau)$. אפשר להניח ש-$\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$, ו-$\tau(1) = 1 + k$. הראו כי $\tau = \sigma^k$.

שאלה 10. (רשות) תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם

$$|\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau)| = 1$$

אז הקומוטטור $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.
רמז: הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

בהצלחה!