יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 1

הגדרה:

יריעה (טופולוגית) n-מימדית היא מרחב טופולוגי האוסדורף עם בסיס בן מניה שבו לכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפית לכדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$ ($=\mathbb{R}^n$ עצמו).

הגדרה:

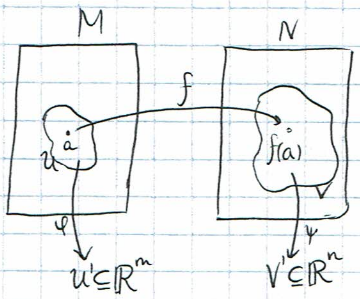
יריעה חלקה n-מימדית היא יריעה טופולוגית n-מימדית שבה נתון כיסוי ע"י קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ והומיאומורפיזמים $\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow[\text{פתוחה}]{} V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$,
כך שלכל $\alpha,\beta\in I$ אם $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ מתקיים שההעתקה

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

היא העתקה חלקה, כלומר C^∞.

מעתה והלאה, כל יריעה היא חלקה.

הגדרה:



יהיו M ו-N יריעות (חלקות). העתקה חלקה היא העתקה $f:M\to N$ כך שלכל $a\in M$ קיימות סביבות קואורדינטות (כלומר סביבה והומיאומורפיזם שמתאימים למבנה החלק) U של a ו-V של f(a) שעבורה המעבר בין הקואורדינטות חלק (כלומר $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ חלקה כהעתקה $\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{U'}}\longrightarrow\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{V'}}$)!

מעתה והלאה, כל העתקה היא חלקה. לאיזומורפיזם בקטגוריה קוראים דיפאומורפיזם.

הגדרה:

תהיינה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ו-$V\subseteq\mathbb{R}^m$, ותהי $f:U\to V$. הדיפרנציאל של f ב-a הינו המטריצה $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$ כאשר $f(x^1,\dots,x^n)=(f^1(x^1,\dots,x^n),\dots,f^m(x^1,\dots,x^n))$.

הדרגה של f ב-a הינה הדרגה של מטריצה זו.

באופן כללי, אם הדרגה של f ב-a היא r, יש סביבה של a שבה הדרגה של f בכל נקודה בה היא לפחות r. בפרט, אם יש נקודה עם דרגה מקסימלית, יש לה סביבה מדרגה מקסימלית.

בנוסף, הדרגה בנקודה אינה תלויה בבחירת הקואורדינטות.

משפט: (משפט הדרגה הקבועה)

תהי"נה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ו- $V\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות, תהי $f:U\to V$ חלקה, ונניח שהדרגה של המטריצה $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$ קבועה r ב-U. אזי לכל נקודה $a\in U$ יש סביבה U' וסביבה V' של $f(a)$ כך ש- $f(U')\subseteq V'$ ויש קואורדינטות חדשות על U' ועל V' כך שבמונחי הקואורדינטות החדשות הנוסחה עבור f היא

$$\underset{\mathbb{R}^n}{(x^1,\dots,x^n)}\longmapsto\underset{\mathbb{R}^m}{(x^1,\dots,x^r,0,\dots,0)}.$$

הוכחה:

ע"י החלפת סדר הקואורדינטות ב-$\mathbb{R}^n$ וב-$\mathbb{R}^m$, ניתן להניח שהמטריצה $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1\le i,j\le r}$ הפיכה.

נביט ב-n הפונקציות הבאות: $f^1,f^2,\dots,f^r,x^{r+1},\dots,x^n$.

אלו קואורדינטות טובות, כי הדיפרנציאל

$$\begin{array}{c}\text{הפיך}\\ \left(\begin{array}{c|c}\frac{\partial f^i}{\partial x^j} & \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}$$

הפיך.

לכן ניתן לבחור אותן כקואורדינטות חדשות $y^1=f^1,\dots,y^r=f^r,y^{r+1}=x^{r+1},\dots,y^n=x^n$.

בקואורדינטות אלו, f היא $(y^1,\dots,y^n)\longmapsto(y^1,\dots,y^r,\varphi^{r+1}(y^1,\dots,y^n),\dots,\varphi^m(y^1,\dots,y^n))$.

כיוון שהדרגה היא עדיין r, מטריצת הדיפרנציאל היא

$$\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0\\ \hline \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} & \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}=0\end{array}\right)$$

כלומר למעשה $\varphi^{r+1},\dots,\varphi^m$ הן רק פונקציות של $y^1,\dots,y^r$:

$$(y^1,\dots,y^n)\longmapsto(y^1,\dots,y^r,\varphi^{r+1}(y^1,\dots,y^r),\dots,\varphi^m(y^1,\dots,y^r)).$$

עתה נבחר קואורדינטות חדשות בטווח. אם הקואורדינטות הקודמות היו $z^1,\dots,z^m$, החדשות יהיו $w^1=z^1,\dots,w^r=z^r,w^{r+1}=z^{r+1}-\varphi^{r+1}(z^1,\dots,z^r),\dots,w^m=z^m-\varphi^m(z^1,\dots,z^r)$.

ההחלפה טובה, כי מטריצת הדיפרנציאל היא

$$\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0\\ \hline * & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\end{array}\right)$$

- הפיכה.

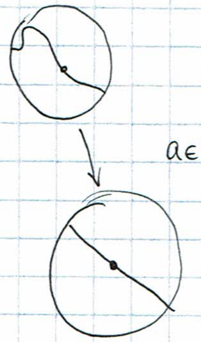
בקואורדינטות החדשות נקבל את הדרוש. $\square$

מסקנה:

אם $f:U\to V$ מדרגה קבועה, אפשר לכתוב אותה בצורה $(x^1,\dots,x^n)\longmapsto(x^1,\dots,x^r,0,\dots,0)$, אז המקור של נקודה ב-$V$ הוא קבוצה ריקה או תת-מרחב אפיני.

כלומר אם $f:M\to N$ חלקה ו- $p\in N$ מקיימת שיש סביבה של $f^{-1}(p)$ שבה $\operatorname{rank}(df)$ היא קבוע r, אז $f^{-1}(p)$ באופן מקומי היא יריעה ממימד $m-r$.

במילים אחרות, יש סביבה U ובחירה של קואורדינטות שעבורן $U\cap f^{-1}(p)$ נתון בקואורדינטות כקבוצה $(u^1,\dots,u^n)$ כך ש-$u^1=\dots=u^r=0$.



<u>הגדרה:</u>

תהי M יריעה n-מימדית. יריעה חלקית (תת-יריעה) $N\subseteq M$ היא תת-קבוצה כך שלכל $a\in N$ יש סביבה U של a ב-M ובחירה של קואורדינטות ב-U כך ש-$N\cap U$ מתואר בקואורדינטות האלו כך: $\{(u^1,\dots,u^n)\mid u^1=\dots=u^r=0\}$.

<u>דוגמה:</u>

ניקח $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x^1,\dots,x^n)=\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2$, וניקח $p=1$.

אזי מתקיים $f^{-1}(p)=\{(x^1,\dots,x^n)\mid \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2=1\}=S^{n-1}$.

כיוון שב-$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ הדרגה קבועה ושווה 1 (מקסימלית), הוכחנו שזו תת-יריעה ממימד $n-1$.

<u>דוגמה:</u>

כאשר $\dim M=\dim N$, העתקה מדרגה מלאה היא שיכון מקומי, אך לא בהכרח שיכון.

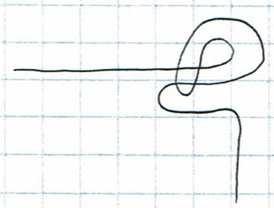
למשל, $\mathbb{R}\longrightarrow S^1$ הנתונה ע"י $t\longmapsto e^{it}$.

<u>דוגמה:</u>

אם $n=\dim M<\dim N=m$, והדרגה של ההעתקה מלאה, היא נראית כך:

$(x^1,\dots,x^n)\longmapsto(x^1,\dots,x^n,0,\dots,0)$.

להעתקה כזו קוראים שיקוע (immersion). דוגמה $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$:



(הצפה)

אם $\dim M>\dim N$ ו-f מדרגה מלאה, אומרים שהיא submersion.

אם $\dim M=\dim N$, העתקה מדרגה מלאה נקראת דיפאומורפיזם מקומי.

<u>הערה:</u>

אם M ו-N יריעות, גם $M\times N$ יריעה; לכל $(a,b)\in M\times N$, אם U סביבת קואורדינטות של a ב-M ו-V של b ב-N, $U\times V$ עם מכפלת ההעתקות $\varphi\times\psi=(\varphi,\psi)$ ($\varphi:U\longrightarrow U'$, $\psi:V\longrightarrow V'$) סביבת קואורדינטות של (a,b).

דוגמה:

נסתכל על הטורוס $S^1\times S^1$, ועל ההעתקה $\mathbb{R}\longrightarrow S^1\times S^1$ הנתונה על ידי $t\longmapsto(e^{ait},e^{bit})$ כאשר $\frac{b}{a}$ אי-רציונלי. זה שיכון חח"ע, אך לא שיכון, התמונה של ההעתקה צפופה ב- $S^1\times S^1$, והיא אינה תת-יריעה. זהו immersed submanifold / תת-יריעה משוקעת.

דוגמה:

$GL_n(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}^{n^2}$ היא קבוצה פתוחה, ולכן היא יריעה בפני עצמה.

אם מסתכלים על $\det: M_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$, $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\{x\mid x\neq 0\})$.

נתעניין ב- $SL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\{1\})$, ונוכיח שהיא תת-יריעה של $GL_n(\mathbb{R})$. הדיפרנציאל מהצורה $1(\underbrace{\qquad\qquad}_{n^2})$.

מספיק שאחת הנגזרות החלקיות תהיה שונה מ-0, כדי שההעתקה תהיה submersion.

תהי $A\in SL_n(\mathbb{R})$.

$$\det\begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{ij}+t & \cdots \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix}=\det A+\det\begin{pmatrix}\boxed{a_{kl}} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ t\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{a_{kl}}\end{pmatrix}=\det A\pm t\cdot\det A_{ij}$$

$$\frac{\partial\det}{\partial x^{ij}}=\pm\det A_{ij}$$

מספיק ש- A תהיה הפיכה כדי שיהיה לה מינור הפיך, ואז יש סביבה שבה כל המטריצות הפיכות, כלומר הדרגה של det מלאה בה.

הגדרה:

נניח ש-M יריעה חלקה שהיא גם חבורה. M היא חבורת לי אם פונקציות הכפל $\begin{matrix}M\times M\longrightarrow M\\ (a,b)\longmapsto a\cdot b\end{matrix}$ וההופכי $\begin{matrix}M\longmapsto M\\ a\longmapsto a^{-1}\end{matrix}$ הן העתקות חלקות.

דוגמה:

גם $GL_n(\mathbb{C})$ ו- $SL_n(\mathbb{C})$ יריעות חלקות, ואפילו יריעות מרוכבות.

ההוכחה זהה להוכחה הקודמת.

זה ינבע ממשפט שנוכיח בעתיד:

משפט:

תת-חבורה סגורה של חבורת לי היא בעצמה חבורת לי, ובפרט יריעה חלקה.

דוגמה:

נגדיר על $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ יחס שקילות: לכל $\lambda\neq 0$, $(z^0,\dots,z^n)\sim\lambda(z^0,\dots,z^n)$.

קבוצת מחלקות השקילות היא $\mathbb{C}P^n$ - המרחב הפרויקטיבי ה-n-מימדי.

נוכיח שזו יריעה מרוכבת.

עבור $i=0,\dots,n$, תהי $U_i\subseteq\mathbb{C}P^n$ הקבוצה המוגדרת ע"י $z^i\neq 0$.

לכל נקודה ב-U_i יש נציג יחיד מהצורה $(z^0,z^1,\dots,\underset{i}{1},\dots,z^n)$.

ניקח את ה-n-יה $(z^0,\dots,z^{i-1},z^{i+1},\dots,z^n)$ המופיעה בנציג הזה כקואורדינטות ב-U_i.

במילים אחרות, $(z^0,\dots,z^n)\longmapsto\left(\frac{z^0}{z^i},\dots,\frac{z^{i-1}}{z^i},\frac{z^{i+1}}{z^i},\dots,\frac{z^n}{z^i}\right)$.

נסתכל על העתקות המעבר כדי להוכיח שזו יריעה מרוכבת:

$$(w^1,\dots,w^n)\longmapsto(w^1,\underset{j}{\dots},w^{i-1},1,w^{i+1},\dots,w^n)\longmapsto\left(\frac{w^1}{w^j},\dots,\frac{w^{j-1}}{w^j},\underset{j}{\,}\frac{w^{j+1}}{w^j},\dots,\underset{i}{\frac{1}{w^j}},\dots,\frac{w^n}{w^j}\right)$$

ואלו אכן העתקות הולומורפיות.

24.10.18

יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 2

בפעם הקודמת הוכחנו שאם ל-f יש דרגה קבועה r בסביבת p, אז יש קואורדינטות סביב p וסביב $f(p)$ כך ש-f נתונה ע"י $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix} x$.

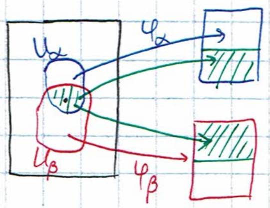
זה גם כמובן תנאי הכרחי. כלומר, אם רוצים שתהיה הצגה כהעתקה לינארית, צריך שהדרגה תהיה קבועה.

נגדיר בצורה מסודרת יותר מהי יריעה חלקה.

__הגדרה:__

תהא M יריעה טופולוגית n-מימדית.

א. __אטלס__ על M הוא אוסף $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ כך ש-$\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של M,



$\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם על V_α שהיא פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$,

ולכל $\alpha,\beta\in I$ ההעתקה

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

היא חלקה.

ב. אטלסים $A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ו-$B=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in J}$ "יקראו __שקולים__" אם $A\cup B$ גם כן אטלס.

כשאנחנו מדברים על מבנה חלק, אפשר לחשוב עליו בשתי דרכים:

- מחלקת שקילות של אטלסים.
- יש במחלקת השקילות אטלס מקסימלי (איחוד מחלקת השקילות כולה).

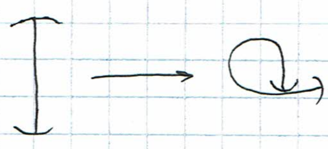
בפעם הקודמת הגדרנו גם חבורת לי כיריעה חלקה G שהיא גם חבורה, ובה פעולות הכפל וההופכי חלקות. נוכיח בקרוב כי למעשה מספיק לדרוש שהעתקת הכפל $G\times G\longrightarrow G$ חלקה (וחלקות פונקציית ההופכי תנבע).

עוד מהפעם הקודמת: נתנו דוגמה לשיקוע שאיננו שיכון $\mathbb{R}\longrightarrow S^1\times S^1$, $t\longmapsto(e^{it},e^{i\sqrt{2}t})$.

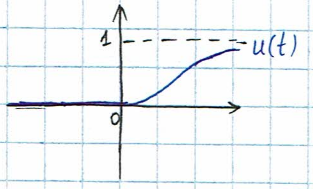
זו בעצם דוגמה מחבורות לי; השיקוע הוא למעשה הומומורפיזם של חבורות לי.

דוגמה נוספת לשיקוע שאיננו שיכון:

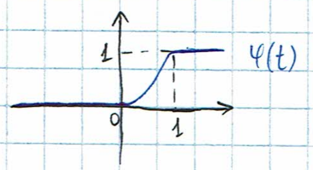
(הפעם לא חבורות לי)



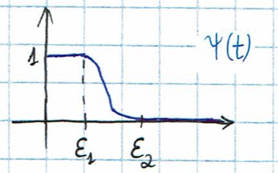
דוגמה:



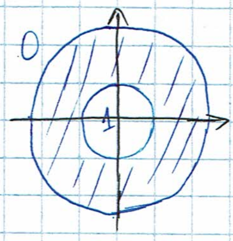
$$u(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ e^{-\frac{1}{t}}, & t>0\end{cases}$$ חלקה אבל לא אנליטית.



$\varphi(t)=\dfrac{u(t)}{u(t)+u(1-t)}$ חלקה, קבועה 0 עבור $t\le 0$ וקבועה 1 עבור $t\ge 1$.

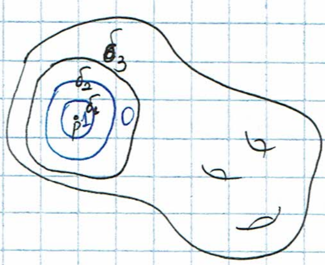


עכשיו אפשר גם להגדיר $\psi:\mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R}$ כפי שבשרטוט:



נגדיר $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ לפי $\eta(x^1,\dots,x^n)=\psi\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)$.

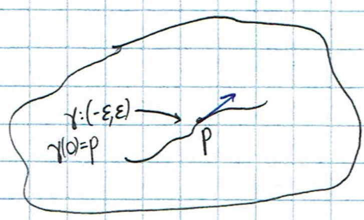
נקרא לה פונקציית בליטה (bump function).



בעזרת פונקציות בליטה אפשר לעשות את הדבר הבא:

בהינתן פונקציה חלקה על סביבה של נקודה, אפשר לצמצם את הסביבה כך שהפונקציה על הסביבה הקטנה מתלכדת עם פונקציה חלקה על היריעה.

אם מסתכלים על הסביבה הגדולה, ו-η היא פונקציית הבליטה המתאימה ל-δ_1 ו-δ_2, אז $f\cdot\eta$ היא חלקה בסביבה הגדולה, אבל אפשר להרחיב אותה ע"י 0 לכל היריעה באופן חלק.



נרצה כעת להגדיר וקטור משיק. הרעיון: נגזרת של מסילה העוברת ב-p.

הגדרה:

וקטור משיק בנקודה $p\in M$ הוא מחלקת שקילות של מסילות $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ עם $\gamma(0)=p$ (ε אינו מספר קבוע) תחת יחס השקילות הבא: $\delta\sim\gamma$ אם באיזושהן קואורדינטות (U,φ), $(\varphi\circ\gamma)'_{t=0}=(\varphi\circ\delta)'_{t=0}$.

באופן שקול, $\delta\sim\gamma$ אם ורק אם לכל $f:M\to\mathbb{R}$, $(f\circ\delta)'_{t=0}=(f\circ\gamma)'_{t=0}$.

(בהגדרת פונקציה חלקה, מספיק ש-f מוגדרת בסביבת p)

<u>הסבר:</u>

בהגדרה הראשונה דרשנו שבקואורדינטות מסוימות $(x^1\circ\delta)'_{t=0}=(x^1\circ\gamma)'_{t=0},\dots,(x^n\circ\delta)'_{t=0}=(x^n\circ\gamma)'_{t=0}$.

מכלל השרשרת,
$$(f\circ\gamma)'_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\underbrace{(x^i\circ\gamma)'_{t=0}}_{=(x^i\circ\delta)'_{t=0}}$$

$\square$

בפרט, זה יהיה נכון בכל קואורדינטות, וזו הגדרה שקולה נוספת.

הגדרה שפיזיקאים אוהבים: תהי $\psi:U\to V$ פונקציית החלפת קואורדינטות.

אז רוצים שיתקיים
$$\begin{pmatrix}\delta^{1\prime}\\ \vdots\\ \delta^{n\prime}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial x^j}\right)\begin{pmatrix}\gamma^{1\prime}\\ \vdots\\ \gamma^{n\prime}\end{pmatrix}$$

(בכל קואורדינטה מקבלים n-יות מספרים, והמעבר ביניהן נעשה באופן לינארי ע"י מטריצת הדיפרנציאל).

מההגדרה האחרונה רואים שהמרחב שקיבלנו - המרחב המשיק - הוא מרחב וקטורי ממימד n. זה כי המעברים נעשים באופן לינארי.

ניתן הגדרה שקולה שונה.

בהינתן מסילה $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ כך ש-$\gamma(0)=p$, היא מגדירה פונקציונל לינארי על מרחב הפונקציות החלקות $\{f:M\to\mathbb{R}\}$ ע"י $L_\gamma(f):=(f\circ\gamma)'(0)$. נזהה את הווקטור המשיק עם הפונקציונל; כלומר, ניתן הגדרה שקולה שבה וקטורים הם בהגדרה פונקציונלים לינאריים על מרחב הפונקציות $C^\infty(M)=\{f:M\to\mathbb{R}\}$.

ואז L_γ מקיים $L_\gamma(f\cdot g)=L_\gamma(f)\cdot g(p)+f(p)\cdot L_\gamma(g)$ - כלל לייבניץ.

נסמן ב-D_p את מרחב הפונקציונלים הלינאריים על $C^\infty(M)$ המקיימים את כלל לייבניץ ביחס לנקודה p.

<u>טענה:</u>

אם $L\in D_p$, אז $L(f)$ תלוי בערכי f רק בסביבת p.

כלומר, אם יש סביבה U של p כך ש-$f|_U=g|_U$, אז $L(f)=L(g)$.

<u>הוכחה:</u>

נביט ב-$h=f-g$. כלומר מספיק להוכיח שעבור $h:M\to\mathbb{R}$ כלשהי, אם יש סביבה U של p כך ש-$h|_U\equiv0$, אז $L(h)=0$.

(המשך ההוכחה)

ניקח פונקציית בלט ψ כך ש- $\psi(p)=1$ ו- $\{x \mid \psi(x)\neq 0\}\subseteq U$. אזי $\psi\cdot h=0$.

$$0=L(\psi\cdot h)=L(\psi)\cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{h(p)}}+\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\psi(p)}}\cdot L(h)=L(h)$$

$\square$

<u>טענה:</u>

אם $L\in D_p$, אז $L(1)=0$, ולכן זה נכון לכל הפונקציות הקבועות.

<u>הוכחה:</u>

$$L(1)=L(1\cdot 1)=L(1)\cdot 1+1\cdot L(1)=2\cdot L(1) \Leftarrow L(1)=0.$$

$\square$

<u>למה:</u>

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ חלקה מוגדרת בסביבה U של נקודה $p\in\mathbb{R}^n$. אזי בסביבת p ניתן להציג את f באופן הבא:

$$f(x^1,\dots,x^n)=f(p^1,\dots,p^n)+\sum_{i=1}^{n} g_i(x^1,\dots,x^n)\cdot(x^i-p^i),$$

כאשר g_i חלקות ומקיימות $g_i(p)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

<u>הוכחה:</u>

ניקח x כלשהו, ונסתכל על המסילה מ- p ל- x: $p+t(x-p)=(1-t)p+tx$.

נגדיר $g(t)=f(p+t(x-p))$; אז

$$f(x)-f(p)=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)\,dt=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))(x^i-p^i)\,dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))\,dt\right)}_{g_i(x)}(x^i-p^i)$$

g_i חלקה כי f חלקה (כאן צריכים ש- f תהיה C^∞; אחרת, אם f הייתה C^k, g_i הייתה רק C^{k-1} ... אז באמת מסתבר שהטענה לא הייתה נכונה). נותר לבדוק:

$$g_i(p)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t\cdot(p-p))\,dt=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,dt=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

כנדרש. $\square$

כעת נוכל לוודא שכל פונקציונל המקיים את כלל לייבניץ הוא מהצורה L_γ.

אילו הפונקציות שהיינו מתעסקים איתן היו C^k $(k<\infty)$ ולא C^∞, מסתבר שהטענה הזו אינה נכונה, ולעתים אפילו D_p ממימד אינסופי.

בהינתן $L\in D_p$ ו-$f\in C^\infty(M)$, נצטמצם לקואורדינטות, ושם נוכל להציג את f באופן

$$f(x)=f(p)+\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\cdot(x^i-p^i),$$

$$g_i(p)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

נשים לב כי $L(g_i)\cdot(x^i-p^i)\Big|_{x=p}=0$; לכן

$$L(f)=0+\sum_{i=1}^{n} g_i(p)\cdot L(x^i-p^i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot L(x^i-p^i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot L(x^i).$$

כעת נוכל לסמן $a^i=L(x^i)$, ונקבל $L(f)=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

אבל זוהי בדיוק הנגזרת של f לאורך המסילה $\gamma(t)=\begin{pmatrix}p^1\\ \vdots\\ p^n\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}$.

כך מראה ש- $L=L_\gamma$.

קיבלנו גם שבקואורדינטות $x^1,\dots,x^n$, הבסיס הסטנדרטי בהתאמה הנ"ל הוא

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

כך יהיה הבסיס הטבעי לעבוד איתו בקואורדינטות $x^1,\dots,x^n$.

נניח $T,L\in D_p$ אז $(T+L)(x^i)=T(x^i)+L(x^i)$ ו-$(aT)(x^i)=aT(x^i)$. כלומר, החיבור והכפל בסקלר הם אותם החיבור והכפל בסקלר שהגדרנו קודם.

המרחב הווקטורי של הווקטורים המשיקים ב-p יסומן T_pM. האיחוד שלהם יסומן $TM=\coprod_{p\in M}T_pM$.

נגדיר מבנה של יריעה חלקה ממימד $2n$ על TM.

אם U סביבת קואורדינטות ב-M עם קואורדינטות $x^1,\dots,x^n$, נזהה את $TU:=\coprod_{p\in U}T_pM$ עם $U\times\mathbb{R}^n$ באופן הבא: $U\times\mathbb{R}^n\longrightarrow TU$

$$(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)\longmapsto\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x^1,\dots,x^n)}.$$

כך משרה טופולוגיה על TU מהטופולוגיה של $U\times\mathbb{R}^n$.

אם $\{U_\alpha\}_\alpha$ כיסוי של M ע"י סביבות קואורדינטות, אז הקבוצות הפתוחות ב-TU השונים יהוו בסיס לטופולוגיה על TM.

נראה ששינויי הקואורדינטות חלקים, ואז נקבל ש- TM יריעה חלקה $2n$-מימדית.

נניח שהקואורדינטות הן $(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)$ והחלפת הקואורדינטות היא $\psi=\begin{pmatrix}\psi^1\\ \vdots\\ \psi^n\end{pmatrix}$, אז

$$(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)\longmapsto\left(\psi^1(x^1,\dots,x^n),\dots,\psi^n(x^1,\dots,x^n),\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi^1}{\partial x^i}(x^1,\dots,x^n)v^i,\dots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi^n}{\partial x^i}(x^1,\dots,x^n)v^i\right)$$

וכל הפונקציות פה חלקות.

TM נקרא **האגד המשיק** של M.

31.10.18 יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 3

איך נראית הנגזרת של מסילה γ ב-p? ($\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $\gamma(0)=p$).

בהגדרה הראשונה (מחלקות שקילות), $v=[\gamma]$.

בהגדרה השניה (קואורדינטות), אם $\gamma(t)=(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))$, אז $\gamma'(t)$ = וקטור הנגזרות לפי הקואורדינטות.

בהגדרה השלישית (עם $f:M\to\mathbb{R}$), $v\cdot f=(f\circ\gamma)'$.

הגדרה:

אגד וקטורי n-מימדי מעל X הוא מרחב E והעתקה $p:E\to X$ על, כך שמתקיים:

א. לכל נקודה $a\in X$ נתון מבנה של מרחב וקטורי על $p^{-1}(x)$.

ב. לכל $a\in X$ יש סביבה U כך שיש הומאומורפיזם $h:p^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ המקיים

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & U\times\mathbb{R}^n \arrow[dl, "\text{הטלה לרכיב הראשון}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

ולכל $x\in U$, $h|_{p^{-1}(x)}:p^{-1}(x)\to\{x\}\times\mathbb{R}^n$ הוא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

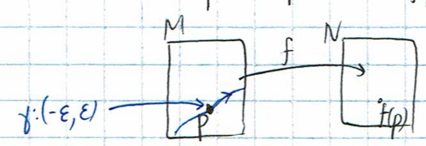
אגד וקטורי חלק n-מימדי הוא אגד וקטורי n-מימדי כך שכל ההעתקות הנ"ל חלקות.

האגד המשיק שאנחנו הגדרנו הוא אגד וקטורי חלק.

דוגמה:

נגדיר אגד וקטורי על S^1 שאינו האגד המשיק. "נפתח" את S^1 ל-I, קטע היחידה ונסתכל על $I\times\mathbb{R}$. נגדיר עליו זיהוי $(0,x)\sim(1,-x)$. זה מגדיר אגד וקטורי, כי זיהינו את $\mathbb{R}$ ע"י איזומורפיזם לינארי, שאיננו האגד המשיק (כי $TS^1=S^1\times\mathbb{R}$, ואילו האגד שלנו אינו אגד מכפלה).

בהינתן $f:M\to N$ ו-$p\in M$, מוגדרת העתקה לינארית $df_p:TM_p\to TN_{f(p)}$:



א. הגדרה ראשונה: $df_p([\gamma]):=[f\circ\gamma]$.

צריך לוודא שאם $\gamma\sim\delta$, אזי $f\circ\gamma\sim f\circ\delta$.

אכן, לכל $g\in C^\infty(M)$, $\frac{d}{dt}\big|_0(g\circ\gamma)=\frac{d}{dt}\big|_0(g\circ\delta)$.

צריך לבדוק שלכל $q\in C^\infty(N)$, $\frac{d}{dt}\big|_0(q\circ f\circ\gamma)=\frac{d}{dt}\big|_0(q\circ f\circ\delta)$.

אבל זה נובע ישירות אם לוקחים $g=q\circ f$.

ב. הגדרה שנייה: (V,ψ) קואורדינטות ב-N בסביבת $f(p)$ (U,φ) קואורדינטות ב-M בסביבת p

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \xmapsto{df_p} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

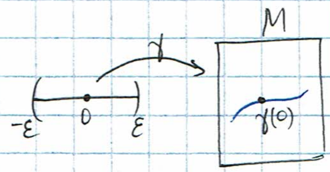
כאשר f מבוטאת בקואורדינטות הנ"ל.

ג. הגדרה שלישית: $\gamma \longrightarrow f\circ\gamma$

ההעתקה היא $v \longmapsto df_p(v)$, כאשר $df_p(v)$ פועל על $q\in C^\infty(N)$ כך:

$df_p(v)(q) := v(q\circ f)$.

זה מוגדר לכל p, ולכן זה מגדיר $df: TM \longrightarrow TN$.



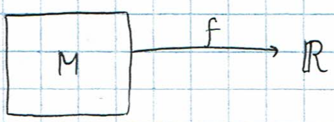
בתחילת השיעור דיברנו על הנגזרת של מסילה. אבל אפשר לחשוב על מסילה כהעתקה בין יריעות $(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$.

$$d\gamma_0 : T_0(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow T_{\gamma(0)}M$$

$d\gamma_0([Id_{(-\varepsilon,\varepsilon)}]) = \gamma'(0)$ (הגדרה 1)

$d\gamma_0\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \gamma'(0)$ (הגדרה 3)

$d\gamma_0(1) = \gamma'(0)$ (הגדרה 2)



כעת נניח שיש העתקה $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$df : T_pM \longrightarrow \mathbb{R} = T_{f(p)}\mathbb{R}$$

אם $v\in T_pM$, $df_p(v) = v(f)$. (הגדרה 3)

בקואורדינטות, זו תהיה ההעתקה $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$. (הגדרה 2)

$df_p([\gamma]) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (f\circ\gamma)$ (הגדרה 1)

כאן df_p היא פונקציונל לינארי מ-T_pM ל-$\mathbb{R}$.

לכן מעניין אותנו גם $(T_pM)^*$, המרחב הדואלי. נרצה לבנות גם ממנו אגד וקטורי, שיסומן T^*M.

ניזכר בבנייה של TM. בהינתן סביבות U ו-V ב-M, הסתכלנו על $U\times\mathbb{R}^n$ ועל $V\times\mathbb{R}^n$. אם $\varphi=(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$ העתקת החלפת הקואורדינטות, הגדרנו

$$(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n) \longmapsto \left(\varphi^1(x^1,\dots,x^n),\dots,\varphi^n(x^1,\dots,x^n), \left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right)$$

איך נגדיר אגד פונקציונלים?

היה ציהוי $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)} \mathbb{R}^n$.

לפי U לפי V

בפונקציונלים: $(b^1,\dots,b^n)\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right) \longleftarrow (b^1,\dots,b^n)$

$$(a^1,\dots,a^n) \longmapsto (a^1,\dots,a^n)\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)^{-1}$$

אם רוצים לחשוב על פונקציונלים כווקטורי עמודה, אפשר לשחלף את המטריצה.

המבנה החלק על T^*M, האגד הקו-משיק, יהיה כמעט זהה למבנה הקודם, רק שנחליף את $\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)$ ב- $\left(\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)^{-1}\right)^t$.

$\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ הוא בסיס, והדואלי לו הוא $dx^1,\dots,dx^n$.

אכן, צריך לוודא $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta^i_j$. זה נכון:

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)=\delta^i_j.$$

נגדיר שנית את המבנה החלק על T^*M. T^*M הוא האגד הקו-משיק, וכל פונקציונל הוא קו-וקטור. קו-וקטורים נסמן עם אינדקסים למטה.

(מסתבר שלמעשה האגד המשיק והאגד הקו-משיק איזומורפיים, אך זה דורש עוד עבודה)

בהינתן סביבת קואורדינטות ב- M $(x^1,\dots,x^n)$,

$$(x^1,\dots,x^n,b_1,\dots,b_n)\longmapsto \sum_{i=1}^n b_i\,dx^i$$

בנקודה $(x^1,\dots,x^n)$

אפשר כעת להגדיר עוד הרבה אגדים על M. למשל, להשתמש ב-$\mathrm{End}(T_pM)$. אז נקבל אגד וקטורי $(n+n^2)$-מימדי. (אבל זהו בעצם $TM\otimes T^*M$).

בהרבה מקרים משתמשים באגדים מהצורה $T_pM\otimes\dots\otimes T_pM\otimes(T_pM)^*\otimes\dots\otimes(T_pM)^*$.

<u>הגדרה:</u>

יהי $\begin{matrix}E\\ p\downarrow\\ X\end{matrix}$ אגד וקטורי (לא בהכרח חלק). חתך ב- E הינו פונקציה $u:X\to E$ כך ש- $p\circ u=Id_X$.

<u>דוגמה:</u>

במקרה שלנו, כאמור, $\begin{matrix}TM\\ \downarrow\\ M\end{matrix}$, מקבלים אובייקט מוכר:

חתך באגד המשיק נקרא שדה וקטורי.

נניח ש-X שדה וקטורי על M (כלומר חתך ב-TM). נרצה לבטא את העובדה ש-X חלק. נעזר בהגדרות 2 ו-3.

א. בלשון 2: אם נרשום את X בקואורדינטות $X(x^1,\dots,x^n)=\sum_{i=1}^n a^i(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x^1,\dots,x^n)}$,
אז X חלק אם ורק אם הפונקציות $a^i(x^1,\dots,x^n)$ חלקות.

ב. בלשון 3: לכל $f\in C^\infty(M)$, גם $Xf\in C^\infty(M)$.

נשים לב ש- $a^i=X(x^i)$.

הערה:

שדה וקטורי A מקיים שלכל $f,g\in C^\infty(M)$, $A(f\cdot g)=(Af)\cdot g+f\cdot(Ag)$.

אם כן, הגדרה חלופית לשדה וקטורי (חלק): העתקה לינארית $A:C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ המקיימת
$A(f\cdot g)=(Af)\cdot g+f\cdot(Ag)$. (*)

הגדרה:

שדה קו-וקטורי φ על M הוא חתך ב-T^*M.

כיצד נבטא את העובדה ש-φ חלק?

בלשון 2, אם $\varphi(x^1,\dots,x^n)=\sum_{i=1}^n b_i(x^1,\dots,x^n)\,dx^i$, אז φ חלק אם ורק אם כל b_i חלקה.

כעת אפשר גם להפעיל $\varphi(A)$, ובכל נקודה נקבל מספר.

הסבר לשקילות של (*) להגדרה שלנו:

לכל p, נגדיר העתקה $f\longmapsto A(f)(p)$. זה פונקציונל לינארי שמקיים את כלל לייבניץ ב-p, ולכן הוא מגדיר וקטור $A(p)\in T_pM$.

למה לכתוב את האינדקסים למעלה עבור וקטורים ולמטה עבור קו-וקטורים?

יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$. אז $x=\sum_{i=1}^n a^i v_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}$.

אם $\{\varphi^1,\dots,\varphi^n\}$ הבסיס הדואלי, $\varphi=\sum_{i=1}^n b_i\varphi^i$,

$\varphi(x)=\sum_{i=1}^n b_i a^i$.

(a^i מוחלפים על ידי A, b_i מוחלפים על ידי $(A^{-1})^t$)

$\cancel{\sum_{i=1}^n a^i b^i}$

האינדקסים למעלה ולמטה יזכירו מתי מותר לסכום. כלומר:

זהו הסכם הסכימה של איינשטיין: $a_i b^i$ הוא סימון מקוצר, מקובל ומאוד נוח עבור $\sum_{i=1}^n a_i b^i$.

במילים אחרות: $a^1,\dots,a^n$ יוחלפו ע"י $\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)$

$b_1,\dots,b_n$ יוחלפו ע"י $\left(\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)^{-1}\right)^t$.

אז $\sum_{i=1}^{n} b_i a^i$ יהיה מוגדר היטב. נסמן אותו $b_i a^i$.

למשל, a^i_j הוא איבר ב- $V\otimes V^*$, כלומר מטריצה המייצגת העתקה לינארית.

$tr(a^i_j) = a^i_i$.

תבנית בי-לינארית היא $b_{ij}x^i y^j$ (כי היא איבר ב- $V^*\otimes V^*$).

תהי M יריעה חלקה, ונתון שדה וקטורי A על M.

$\gamma:(a,b)\longrightarrow M$ הוא עקום אינטגרלי (integral curve) של A, אם $\gamma'(t)=A(\gamma(t))$.

בקואורדינטות, זה אומר שיש עקום $\begin{pmatrix}\gamma^1(t)\\ \vdots\\ \gamma^n(t)\end{pmatrix}$ המקיים

$$\begin{pmatrix}\gamma^{1\prime}(t)\\ \vdots\\ \gamma^{n\prime}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^1(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))\\ \vdots\\ A^n(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))\end{pmatrix}.$$

זו מערכת מד"ר מסדר ראשון. כיוון שהפונקציות A^i חלקות, קיים פתרון כזה בסביבה (מספיק קטנה) של כל נקודה. הוכחנו:

<u>משפט:</u>

לכל $p\in M$ יש סביבה שבה מוגדר עקום אינטגרלי של A.

יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 4

הערה:

עבור יריעה M, נהוג לסמן ב-M^n את העובדה ש-$n=\dim M$ (זה לא M בחזקת n).

הערה:

בהינתן $f:M^n\longrightarrow N^k$, הגדרנו $df_a: T_aM\longrightarrow T_{f(a)}N$. זו העתקה לינארית,
כי בקואורדינטות היא נתונה ע"י מטריצה.

כיוון שזה מוגדר לכל $a\in M$, קיבלנו העתקה $df: TM\longrightarrow TN$. זו העתקה של אגדים וקטוריים.

העתקה של אגדים וקטוריים $\begin{smallmatrix}E_1\\ \downarrow\\ B_1\end{smallmatrix}$ ל- $\begin{smallmatrix}E_2\\ \downarrow\\ B_2\end{smallmatrix}$ היא $G:E_1\longrightarrow E_2$ כך שקיימת $g:B_1\rightarrow B_2$
שעבורה הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{G} & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

ובכל סיב G משרה העתקה לינארית.

מה קורה עבור קו-וקטורים? אפשר להגדיר $f^*: T^*_{f(a)}N\longrightarrow T^*_aM$ לפי $f^*(\varphi)(v):=\varphi(df_a(v))$.
זה כבר לא משרה העתקה מ-T^*N ל-T^*M!

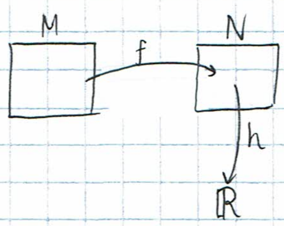
מתי כן אפשר? אם יש חתך. נניח ש-$\omega\in\Omega^1(N)$ שדה קו-וקטורי (1-תבנית). לכל $f:M\longrightarrow N$,
אפשר להגדיר $f^*(\omega)\in\Omega^1(M)$ כך: $f^*(\omega)(v)=\omega(df(v))$. $(f^*(\omega)=\omega\circ df)$

אי-אפשר גם למשוך שדות וקטוריים מ-M ל-N; אם $f:M\longrightarrow N$, יכול להיות ש-f לא
חד-חד ערכית, ואז לא ברור איך להגדיר, או ש-f לא על, ואז אין דרך טובה להגדיר.

נסמן בנוסף $C^\infty(M)=\Omega^0(M)$. אפשר למשוך גם פונקציות: $f^*(h)$ מוגדר
כך: $f^*(h)=h\circ f$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \downarrow h \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

בקואורדינטות, $\omega(df(v))$ מוגדר כך: df היא המטריצה $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$, v הוא
וקטור עמודה ו-ω הוא וקטור שורה.



תהי $h\in C^\infty(N)$. dh היא 1-תבנית. נחשב את $f^*(dh)$:

$$f^*(dh)=dh\circ df=d(h\circ f)=d(f^*(h)).$$

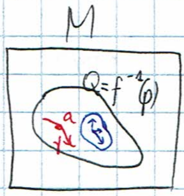
כלומר $f^*d=df^*$. זה מזכיר העתקת שרשראות (או קו-שרשראות).

הגדרה:

$f:M\longrightarrow N$ נקרא **שיקוע** (immersion) אם df_a חד-חד ערכי לכל $a\in M$,
וטיבוע (submersion) אם df_a על לכל $a\in M$.

אנחנו הוכחנו שאם $f:M^n\longrightarrow N^k$ טיבוע, ו- $p\in N$, אזי $f^{-1}(p)$ תת-יריעה ממימד $n-k$.

העתקה שהיא גם שיכון וגם טיבוע היא דיפאומורפיזם מקומי.



נסמן $Q=f^{-1}(p)$. יש הכלה $i:Q^{n-k}\longrightarrow M^n$; איך נראה $di:TQ\longrightarrow TM$?

נזהה את TQ עם תמונתו ב- TM תחת di.

<u>טענה:</u>

לכל $a\in Q$, $T_aQ=\ker df_a$.

<u>הוכחה:</u>

מספיק להראות $T_aQ\subseteq \ker df_a$ כי המימדים שלהם שווים.

אכן, אם γ מסילה כך ש- $\gamma(0)=a$, $df_a([\gamma])=[f\circ\gamma]=[\text{מסילה קבועה ב} p]=0$.

(בעצם, לא צריך להתאמץ, כי f נתונה בקואורדינטות ע"י $(x^1,\dots,x^k,0,\dots,0)$ ואז הגרעין מתלכד עם המרחב המשיק וכו').

$\square$

נחזור לשדות וקטוריים.

הגדרנו עקום אינטגרלי $\gamma:(a,b)\longrightarrow M$ לפי $\gamma'(t)=A(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))$ כאשר A שדה וקטורי נתון.

זה לא תלוי בקואורדינטות, ותמיד קיים פתרון יחיד כי כל הפונקציות חלקות.

<u>טענה:</u> (חלקות בתנאי ההתחלה)

בהינתן שדה וקטורי על M ובהינתן נקודה $a\in M$, קיימים $\varepsilon>0$, סביבה U של a ב-M והעתקה חלקה $F:U\times(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$ המקיימת:

א. לכל $x\in U$, $F(x,0)=x$.

ב. לכל x קבוע, אם נסמן $\gamma(t)=F(x,t)$, אזי $\gamma(t)$ עקום אינטגרלי של השדה הווקטורי.

(x הוא כמו פרמטר שנותן את תנאי ההתחלה). ל- F כמו קוראים זרימה.

(אפשר למצוא הוכחה בספרים של מד"ר, או בספר שלי בנספחים כנראה.)

נסמן $F_t(x):=F(x,t)$. (זאת חבורה חד-פרמטרית של דיפאומורפיזמים מקומיים)

יהיו $-\varepsilon<s,t<\varepsilon$ כך ש- $-\varepsilon<s+t<\varepsilon$. אז $F_{s+t}=F_s\circ F_t$. (כי השדה הווקטורי אינו משתנה בזמן).

בפרט, $F_s\circ F_{-s}=F_0=Id$. לכן F_s הוא דיפאומורפיזם.

הגדרה:

שדה וקטורי שעבורו קיים עקום אינטגרלי על כל $\mathbb{R}$ מכל נקודת התחלה נקרא שדה וקטורי שלם.

משפט:

אם M קומפקטית, אז כל שדה וקטורי על M הוא שלם.

הוכחה:

לכל נקודה x קיימת U_x וקיים ε_x שעבורם קיימת F כנ"ל. $\{U_x\}$ כיסוי פתוח של M, לכן קיים תת-כיסוי פתוח סופי $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$. נסמן $\varepsilon=\min\{\varepsilon_{x_1},\dots,\varepsilon_{x_n}\}$.

עכשיו אפשר להרכיב את הזרימות על עצמן כדי להגיע לכל מספר ממשי. $\square$

נתבונן שוב בשדות וקטוריים, ונגדיר עליהם פעולה.

חשבנו על שדה וקטורי כעל $V:C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ המקיים $V(f\cdot g)=V(f)\cdot g+f\cdot V(g)$.

אוסף השדות הוקטוריים $\mathfrak{X}(M)$ הוא תת-מרחב של $End(C^\infty(M))$.

נשים לב שזה לא תת-חוג:

$$(A\circ B)(f\cdot g)=A(B(f\cdot g))=A(B(f)\cdot g+f\cdot B(g))=(ABf)\cdot g+(Bf)(Ag)+(Af)(Bg)+f\cdot(ABg)$$

$$(B\circ A)(f\cdot g)=\quad\cdots\quad=(BAf)\cdot g+(Af)\cdot(Bg)+(Bf)\cdot(Ag)+f\cdot(BAg)$$

אבל, הפלא ופלא, מתקיים:

$$(A\circ B-B\circ A)(f\cdot g)=((A\circ B-B\circ A)(f))\cdot g+f\cdot((A\circ B-B\circ A)(g))$$

לזה כן מקיים כלל לייבניץ! כלומר, זו תת-אלגברת לי.

מסמנים את השדה הווקטורי $A\circ B-B\circ A$ בסימון $[A,B]$, ויקרא מכפלת לי או סוגרי לי (Lie brackets) של A ו- B.

<u>הגדרה:</u>

אלגברת לי היא מרחב וקטורי L (נאמר מעל $\mathbb{R}$) ועליו מכפלה בילינארית $[A,B]$ המקיימת:

א. $[A,A]=0$ (שקול*: $[A,B]=-[B,A]$)

* - עד כדי מאפיין 2

ב. זהות יעקובי: $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

אפשר לסדר את זהות יעקובי גם בצורה שתיראה כמו כלל לייבניץ:

$$[A,[B,C]]=[[A,B],C]+[B,[A,C]].$$

בדרך שקולה נוספת:

$$[[A,B],C]=[A,[B,C]]-[B,[A,C]].$$

14.11.18

יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 5

תזכורת:

הגדרנו את סוגרי לי להיות $[A,B]=A\circ B-B\circ A$.

הגדרה:

(מרחב השדות הווקטוריים הוא מודול מעל הפונקציות החלקות)

בהינתן שדה וקטורי A ופונקציה חלקה $f\in C^\infty(M)$, נגדיר fA כך: $fA(\varphi)=f\cdot(A\varphi)$.

כעת, נשים לב כי

$$[A,fB](\varphi)=A(f\cdot B(\varphi))-f\cdot B(A(\varphi))=A(f)\cdot B(\varphi)+f\cdot A(B(\varphi))-f\cdot B(A(\varphi))=$$

$$=(f\cdot[A,B])(\varphi)+((f\cdot A)B)\varphi$$

כלומר $[A,fB]=f[A,B]+(A\cdot f)\cdot B$. בכיוון ההפוך,

$$[fA,B]=-[B,fA]=-(f\cdot[B,A]+(B\cdot f)\cdot A)=f[A,B]-(Bf)A.$$

אם נחבר,

$$[fA,gB]=g[fA,B]+(fA)(g)B=g(f[A,B]-(Bf)A)+f\cdot(Ag)\cdot B=$$

$$=fg[A,B]+f\cdot(Ag)\cdot B-g\cdot(Bf)\cdot A$$

בקואורדינטות $x^1,\dots,x^n$, נניח $A=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $B=\sum_{i=1}^n b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$; אז

$$[A,B]=\left[\sum_i a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_j b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=\sum_{i,j}\left[a^i\frac{\partial}{\partial x^i},b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=$$

$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$

$$=\sum_{i,j}\left(a^i\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^i}b^j\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}-b^j\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^j}a^i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=$$

$$=\sum_j\left(\left(\sum_i a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)b^j-\left(\sum_i b^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)a^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_j\left(A(b^j)-B(a^j)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

במילים אחרות, הרכיב ה-j של $[A,B]$ הוא $A(b^j)-B(a^j)$.

בהרצאה הקודמת אמרנו שאם $f:M\longrightarrow N$, אפשר להגדיר $df:TM\longrightarrow TN$ ו-$f^*:\Lambda^1(N)\longrightarrow\Lambda^1(M)$.

אם $f:M\longrightarrow N$ דיפאומורפיזם, אפשר להגדיר $f_*:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(N)$: עבור $p\in N$ ובהינתן $A\in\mathfrak{X}(M)$, $f_*(A)(p)=df(A(f^{-1}(p)))$.

בדומה אפשר למשוך גם דבר לכל כיוון (כשיש דיפאומורפיזם).

הגדרה:

בהינתן שדה וקטורי A על M נגדיר פעולת גזירה L_A, הנקראת נגזרת לי לפי A.

היא תגזור כל דבר, למשל גוררת שדות וקטוריים.

נסמן ב-φ_t את הזרימה של A, ונגדיר עבור שדה וקטורי B מהו $L_A(B)$:

$$L_A(B)_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{(d\varphi_t)^{-1} B(\varphi_t(p))}_{\text{וקטור ב-}T_pM\text{ כפונקציה של }t}.$$

עבור שדה קו-וקטורי $\omega\in\Lambda^1(M)$,

$$L_A(\omega)_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (d\varphi_t)^* \omega(\varphi_t(p)).$$

נחשב עבור שדה וקטורי בקואורדינטות.

$$(d\varphi_t)^{-1} B(\varphi_t(p)) = (*)$$

מטריצה הפיכה; n-יה של מספרים

נשים לב כי מתקיים:

$$(d\varphi_t)^{-1}_{\varphi_t(p)} \circ (d\varphi_t)_p = \text{הזהות}$$

מטריצה $A(t)$ כפונקציה של t; מטריצה $B(t)$ כפונקציה של t

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)\cdot B(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)\right)\cdot B(t)_{t=0} + A(t)_{t=0}\cdot\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} B(t)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} B(t) = 0$$

כלומר, הוכחנו שאם $A(t)$ מסילה של מטריצות הפיכות ו-$A(0)=I$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A^{-1}(t) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)$.

נגזור את $(*)$ לפי כלל לייבניץ:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(*) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(d\varphi_t)\, B(p) + I\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} B(\varphi_t(p))$$

ברכיבים, המחובר השני הוא $A(b^i)$. עבור המחובר הראשון: נרשום

$$\varphi_t(x) = \begin{matrix}\varphi^1(t,x^1,\dots,x^n)\\ \vdots \\ \varphi^n(t,x^1,\dots,x^n)\end{matrix}$$

ולכן המחובר הראשון הוא

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)\right)\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial t\,\partial x^j}\right)\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\right)}{\partial x^j}\right)\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix} = \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j} a^i = B(a^i)$$

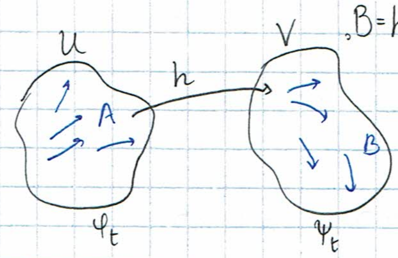
וביחד הוכחנו: $L_A(B)^i = A(b^i) - B(a^i) = [A,B]^i$.

משפט:

יהיו A ו-B שדות וקטוריים על M. אזי $L_A B = [A,B]$.

נניח שיש דיפאומורפיזם בין שתי סביבות $h:U\to V$ (או יריעות).

אם יש שדה וקטורי A על U שמעביר ל-V את השדה הוקטורי B: $B=h_*A$.



אם φ_t זרימה של A ו-ψ_t זרימה של B,

$$\psi_t(p)=h(\varphi_t(h^{-1}(p)))$$

כלומר $\psi_t=h\circ\varphi_t\circ h^{-1}$.

ניקח $U=V$, $A=B$. אז $h_*A=A$, כלומר A נשמר תחת h. במקרה כזה נקבל

$$\varphi_t=h\circ\varphi_t\circ h^{-1},$$

ובמילים אחרות h ו-φ_t מתחלפים.

<u>משפט 1:</u>

אם $h_*A=A$ ו-φ_t הזרימה של A, אז h ו-φ_t מתחלפים. □

<u>משפט 2:</u>

אם $[A,B]=0$ אז הזרימה φ_t של A שומרת את B, כלומר $(\varphi_t)_*(B)=B$ לכל t בסביבה קטנה של 0.

<u>הוכחה:</u>

רוצים להוכיח $d\varphi_t(B(p))=B(\varphi_t(p))$ לכל t בסביבה קטנה של 0, כלומר $B(p)=(d\varphi_t)^{-1}B(\varphi_t(p))$.

הנגזרת ב-0 של הביטוי הזה הגדירה את L_AB. אנחנו רוצים להראות שהביטוי $(d\varphi_t)^{-1}B(\varphi_t(p))$ קבוע עבור t בסביבה קטנה של 0.

לכן צריך להוכיח שהנגזרת של הפונקציה הזו היא 0 <u>לכל t</u> בסביבה קטנה של 0.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\left((d\varphi_t)^{-1}B(\varphi_t(p))\right)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left((d\varphi_{t+s})^{-1}B(\varphi_{t+s}(p))\right)=$$

$$\xrightarrow{\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_t}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left((d\varphi_s)^{-1}\underbrace{(d\varphi_t)^{-1}B(\varphi_t(\varphi_s(p)))}_{L_AB_{\varphi_s(p)}=0}\right)$$

כנדרש. □

<u>מסקנה:</u>

הזרימה של A שומרת את A עצמו, כי $[A,A]=0$.

מסקנה:

אם $[A,B]=0$ ו- ψ_t ו- ψ_t הזרימות של A ושל B בהתאמה, אז עבור t ו- s בסביבה קטנה של 0 מתקיים $\psi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \psi_t$.

זה נכון רק בסביבה קטנה של 0, כי יכול להיות שאם נלך רחוק מדי הזרימה של ψ לא תהיה מוגדרת עד הזרימה של ψ (או להפך). במקרה של שדות וקטוריים שלמים, זה יהיה נכון לכל t ו- s.

תרגיל:

אם ψ_s ו- ψ_t מתחלפים עבור t ו- s קטנים, אז $[A,B]=0$.

התפלגויות על יריעות

הגדרה:

תהי M יריעה ממימד n. התפלגות k-מימדית ב-M היא בחירה חלקה של תת-מרחב k-מימדי בכל T_pM. נסמן למשל $W(p)$ כתת-המרחב שנבחר בנקודה p. בחירה באופן חלק פירושה שלכל נקודה p יש סביבה U ו- k שדות וקטוריים חלקים $A_1,\dots,A_k$ ב-U כך שלכל $x\in U$, $A_1(x),\dots,A_k(x)$ הם בסיס לתת-המרחב $W(x)$.

הגדרה:

שדה וקטורי A על M ייקרא משיק להתפלגות W אם $A(x)\in W(x)$ לכל $x\in M$.

הגדרה:

התפלגות $W(p)$ תיקרא סגורה תחת מכפלת לי (לוספט) אם לכל שני שדות וקטוריים A,B שמשיקים ל-W, גם $[A,B]$ משיק ל-W.

נרצה לדעת מתי התפלגות k-ממדית מגיעה מהמרחב המשיק של תת-יריעה k-מימדית.

משפט: (משפט פרובניוס)

תהי W התפלגות לוספטי על M. אזי לכל $p\in M$ יש סביבה U וקואורדינטות $x^1,\dots,x^n$ על U כך ש- $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^k}$ בסיס ל- $W(x)$ לכל $x\in U$.

בפרט נובע שלכל נקודה $x\in U$ יש תת-יריעה N של U ממימד k המקיימת $x\in N$ כך שהמשיק ל-N בכל נקודה $y\in N$ הוא $W(y)$.

21.11.18

יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 6

תזכורת:

התפלגות k-מימדית היא בחירה $W(p)\subseteq T_pM$ של תת-מרחב ממימד k לכל $p\in M$, כך שלכל $p\in M$ יש סביבה U ושדות וקטוריים $A_1,\dots,A_k$ ב-U כך ש- $A_1(x),\dots,A_k(x)$ בסיס ל-$W(x)$ לכל $x\in U$.

אמרנו שההתפלגות לופפת אם לכל A,B שמשיקים ל-W (כלומר $A(x)\in W(x)$ לכל x), גם $[A,B]$ משיק ל-W.

נרצה להוכיח את המשפט הבא:

משפט: (משפט פרובניוס)

התנאים הבאים שקולים:

א. W לופפת.

ב. לכל נקודה p יש סביבה U וקואורדינטות $x^1,\dots,x^n$ כך ש $W(x)=Span\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^k}\}$ לכל $x\in U$.

ג. לכל נקודה p יש תת-יריעה N ממימד k ומכילה את p שמשיקה ל-W, כלומר לכל $x\in N$ מתקיים $T_xN=W(x)$. "תת-יריעה אינטגרלית"

אנחנו נוכיח את הגרירה א⇐ב; הגרירה ב⇐ג ברורה, והגרירה ג⇐א גם אינה קשה (כפי הנראה).

הוכחת א⇐ב:

יהיו $A_1,\dots,A_k$ שדות וקטוריים בסביבה U של p עם קואורדינטות $x^1,\dots,x^n$ כך ש- $A_1(x),\dots,A_k(x)$ בסיס ל- $W(x)$ לכל $x\in U$.

בקואורדינטות, לפי הבסיס $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$, כל $A_i(x)$ נחשוב כווקטור עמודה $\begin{pmatrix}A_i^1(x)\\ \vdots\\ A_i^n(x)\end{pmatrix}$.

k העמודות הללו בלתי-תלויות לינארית לכל x. בה"כ המטריצה הריבועית $\begin{pmatrix}A_1^1 & \cdots & A_k^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_1^k & \cdots & A_k^k\end{pmatrix}$ הפיכה, אולי בסביבה קטנה יותר V.

לכל x, נסמן ב- $B(x)$ את המטריצה ההפוכה למטריצה הנ"ל. אם נכפול את המטריצה $\begin{pmatrix}A_1^1(x) & \cdots & A_k^1(x)\\ \vdots & & \vdots\\ A_1^n(x) & \cdots & A_k^n(x)\end{pmatrix}$ ב-$B(x)$ מימין, כל עמודה בתוצאה תהיה צירוף לינארי של עמודות המטריצה, וכיוון ש-$B(x)$ הפיכה גם הן יהיו בסיס. אחרי הכפל נקבל

$$\begin{pmatrix}A_1^1(x) & \cdots & A_k^1(x)\\ \vdots & & \vdots\\ A_1^n(x) & \cdots & A_k^n(x)\end{pmatrix}\Big(\;B(x)\;\Big)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & \cdots & C_k \end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\\ C_1^{k+1}(x) & \cdots & C_k^{k+1}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ C_1^n(x) & \cdots & C_k^n(x)\end{pmatrix}\end{array}$$

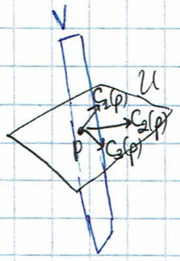
(המשך ההוכחה)

נטען כי $[C_i,C_j]=0$. אכן, בקואורדינטות $[C_i,C_j]=C_i(C_j)-C_j(C_i)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ D_{k+1}(x)\\ \vdots\\ D_n(x)\end{pmatrix}$ (ה-k הרכיבים הראשונים 0).

קואורדינטה
קואורדינטה

כיוון שההתפלגות לופפת, $[C_i,C_j]$ גם הוא משיק ל-W. לכן היא צריכה להיות צירוף לינארי של $C_1,\dots,C_k$. כיוון ש-k הקואורדינטות הראשונות הן 0, בהכרח נקבל שזהו הצירוף הטריוויאלי, כלומר $D_{k+1}(x)=\dots=D_n(x)=0$.

בסביבה מספיק קטנה יהיו זרימות $\varphi_t^1,\dots,\varphi_t^k$ המתאימות ל-$C_1,\dots,C_k$ כך שכל ההרכבות שלהן בכל הסדרים קיימים ומתחלפים. באמצעות הזרימות הללו נבנה קואורדינטות $y^1,\dots,y^n$ כך ש-$\frac{\partial}{\partial y^i}=C_i$ לכל $1\le i\le k$.



אנחנו עובדים בסביבת קואורדינטות U, שנחשוב עליה כמו על $\mathbb{R}^n$. על ידי החלפת בסיס ב-$\mathbb{R}^n$, נניח כי p היא הראשית. ניקח תת-מרחב $(n-k)$-מימדי של $\mathbb{R}^n$ שיהיה מחובר ישר של $\operatorname{Span}\{C_1(p),\dots,C_k(p)\}$ ב-$\mathbb{R}^n$ ונוכל להניח (שוב על ידי החלפת בסיס ב-$\mathbb{R}^n$) ש-$V=\{x^1=\dots=x^k=0\}=\{(0,\dots,0,x^{k+1},\dots,x^n)\}$.

נגדיר קואורדינטות $F:\text{סביבת הראשית ב-}\mathbb{R}^n\to U$ לפי $F(x^1,\dots,x^n):=\varphi^1_{x_1}\circ\varphi^2_{x_2}\circ\dots\circ\varphi^k_{x_k}(0,\dots,0,x^{k+1},\dots,x^n)$.

צריך להראות שזה מגדיר קואורדינטות, כלומר שזהו דיפאומורפיזם. לכן צריך להראות שהדיפרנציאל הפיך. אם גוזרים את F לפי x^i עבור $k+1\le i\le n$, מקבלים וקטורים בלתי-תלויים שנמצא ב-V; אם גוזרים לפי x^i עבור $1\le i\le k$, מקבלים את $C_i(p)$. לכן מקבלים n וקטורים בלתי-תלויים. מכאן שזהו דיפאומורפיזם בסביבה מספיק קטנה.

נותר להראות שבקואורדינטות האלו, הנגזרת $\frac{\partial}{\partial x^i}=C_i(p)$ עבור $1\le i\le k$. כיוון שהם מתחלפים, אפשר להעביר את $\varphi^i_{x_i}$ לצד שמאל בהרכבה. אז באמת ההתקדמות $\frac{\partial}{\partial x^i}$ היא הזרימה של C_i. זה מסיים את ההוכחה. $\square$

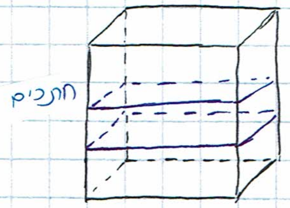
הערה:

פה לכל נקודה יש סביבה שבה אנחנו מבינים את תת-היריעה האינטגרלית.

אבל היינו רוצים לדעת לחבר את תת-היריעות האלו באופן המקסימלי שנוכל, בדיוק כפי שרצינו לדעת מתי אפשר להמשיך את העקומים האינטגרליים. באופן גלובאלי אולי זו לא תהיה תת-יריעה משוכנת, אלא תת-יריעה משוקעת.

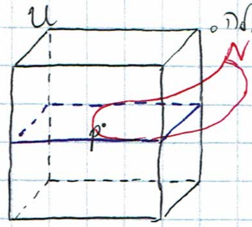
בעצם, בכל נקודה הפתרונות האינטגרליים שלנו היו מהצורה

קבוע $= x^n$, ..., קבוע $= x^{k+1}$.



סביבה U שבה $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^k}$ בסיס עבור W וחתכים בתמונה

ניקח סביבת קואורדינטות U כך ש- $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^k}$ בסיס ל-W בכל נקודה וכך שהתמונה של U ב-$\mathbb{R}^n$ היא קוביה. נראה שכל תת-יריעה אינטגרלית קשירה מוכלת באחד החתכים, וזה יראה לנו שיש אימרשן יחידה לפתרון שלנו. בעצם, צריך לבדוק שהדיפרנציאלים של $x^{k+1},\dots,x^n$ מתאפסים, ומהקשירות נקבל שהיא מוכלת באחד החתכים. אבל הדיפרנציאלים האלו פועלים על המרחב המשיק, שנפרש ע"י $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^k}$, ומתקיים $dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)=0$ לכל $1\le i\le k$, $k+1\le j\le n$.

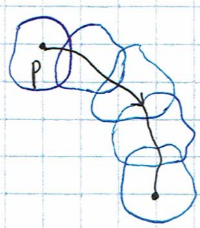


כעת, נרצה לקחת את כל תת-היריעות האינטגרליות ולהדביק אותן ליריעה אחת גדולה. נסתכל על איחוד כל תת-היריעות האינטגרליות בכל $p\in M$, נסמנו N. לכל $p\in M$ נבחר סביבה U_p כנ"ל, ונגדיר ש-$U\subseteq N$ פתוחה אם ורק אם החיתוך של U עם כל תת-יריעה אינטגרלית פתוח בתת-היריעה.

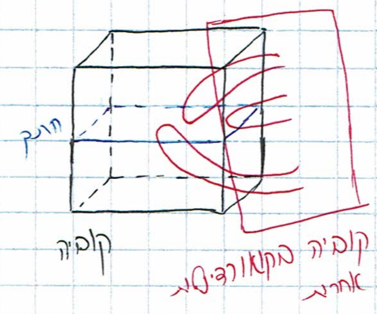
אם אנחנו רוצים ש-N תהיה יריעה, צריך להראות שיש ל-N בסיס בן-מניה. כרגע לכל נקודה $p\in M$ יש קוביה U_p נפרדת.

<u>תרגיל:</u> אם ל-X יש בסיס בן-מניה, אז לכל כיסוי פתוח של X יש תת-כיסוי בן-מניה.

בפרט, אצלנו יהיה מספר בן-מניה של קוביות שיכסו את M.



נשים לב שאם q באותו רכיב קשירות של p, אפשר להגיע מ-p ל-q ע"י מסילה כלשהי, שתכוסה ע"י כל הקוביות. אבל $[0,1]$ קומפקטי, ולכן, ע"י שימוש במספר לבג, אפשר לכסות את המסילה ע"י מספר סופי של קוביות.



נסתכל על החיתוך של שתי קוביות. ספציפית, על החיתוך של קוביה אחת עם חתך בתוך השנייה. החתכים השונים בתוך אותה קוביה זרים זה לזה, והחיתוך של חתך בקוביה הראשונה עם החתך בשנייה פתוח. לכן יש רק מספר בן-מניה של חתכים בקוביה הראשונה שחותכים אותו.

אבל אנחנו מבצעים מספר סופי של צעדים, לכן בסוף הכל נקבל מספר בן-מניה של קבוצות פתוחות בבסיס, כנדרש.

חבורות לי

<u>הגדרה:</u>

חבורת לי (Lie group) היא חבורה G שהיא גם יריעה חלקה כך שפונקציית הכפל

$$G\times G \xrightarrow{m} G$$

היא חלקה.

<u>משפט:</u>

ההעתקה $inv: G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$, היא חלקה.

נוכיח ראשית מספר טענות.

בהינתן $a\in G$ נגדיר $L_a: G\to G$ ע"י $L_a(g)=ag$ ו- $R_a: G\to G$ ע"י $R_a(g)=ga$.

<u>טענה:</u>

L_a ו- R_a פונקציות חלקות, ולכן דיפאומורפיזמים.

<u>הוכחה:</u>

L_a חלקה כהרכבה $G \xrightarrow{(k_a, Id_G)} G\times G \xrightarrow{m} G$, ובדומה R_a.

L_a דיפאומורפיזם כי ההעתקה ההפוכה ל- L_a היא $L_{a^{-1}}$.

$\square$

נחשב את הדיפרנציאל של m; $dm: T_{(a,b)}(G\times G)\to T_{ab}G$. בקואורדינטות,

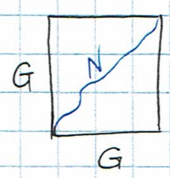
$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \multicolumn{2}{c}{2n} \\ \hline
n & dR_b|_a & dL_a|_b \\ \hline
 & a(t)\cdot b & a\cdot b(t)
\end{array}$$

בנגזרת החלקית מקבעים את שאר הקואורדינטות, בפרט את החצי הימני

החצי הימני והחצי השמאלי שניהם הפיכים, לכן dm מדרגה מלאה, כלומר m היא שיקוע.

לכן $N=\{(a,b)\mid m(a,b)=e\}$ היא תת-יריעה n-מימדית של $G\times G$. אבל $N=\{(a,a^{-1})\mid a\in G\}$.

איבר היחידה



כעת יש שתי הטלות $P_1,P_2: G\times G\to G$. אם מצמצמים אותן ל-N, הן חח"ע ועל. כדי להראות שהן דיפאומורפיזמים, מספיק להראות שהן דיפאומורפיזמים מקומיים, כלומר שבסביבת כל נקודה הדיפרנציאל מדרגה מלאה.

בכל נקודה, המרחב המשיק הוא הגרעין של dm. אם נכתוב $dm=\boxed{A\,|\,B}_{(a,a^{-1})}$,

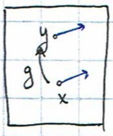
אז $V=\{\binom{x}{y}\mid Ax+By=0\}$. נראה ש- $P_1|_V$ על: נתון x ונראה שקיים y כך ש- $\binom{x}{y}\in V$, כלומר קיים y כך ש- $Ax+By=0$. עובד עם $y=-B^{-1}Ax$.

בסך הכל הראינו ש-P_1 דיפאומורפיזם. אז

$$inv = P_2 \circ (P_1|_N)^{-1}$$

אז היא חלקה, לכן דיפאומורפיזם: inv הופכית לעצמה.

הגדרה:



שדה וקטורי A על G ייקרא שמור משמאל אם לכל $g\in G$, $(L_g)_*(A)=A$.

שדה וקטורי כזה נקבע על ידי הערך שלו ב-e: אם $A(e)=v$, אז לכל $g\in G$,
$A(g)=dL_g(v)$.

גם הכיוון ההפוך נכון: בהינתן $v\in T_eG$ קיים שדה וקטורי A שמור משמאל על G המקיים $A(e)=v$,
והוא נתון על ידי $A(g)=dL_g(v)$.

צריך לוודא שהוא חלק. נניח ש-$x^1,\dots,x^n$ קואורדינטות בסביבת g, ונניח
ש-$y^1,\dots,y^n$ קואורדינטות בסביבת e. נניח ש-$e^1,\dots,e^n$ הן הקואורדינטות של e עצמו.

$$dm|_{(a,b)} = \begin{array}{c} \\ n \\ \\ \end{array} \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{2n} \\ \hline dR_b|_a & dL_a|_b \\ \hline x^1,\dots,x^n & y^1,\dots,y^n \end{array}$$

אז A נתון לפי

$$n\left[\ \frac{\partial m^i}{\partial y^j}(x^1,\dots,x^n,e^1,\dots,e^n)\ \right]_{n} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

וזה חלק.

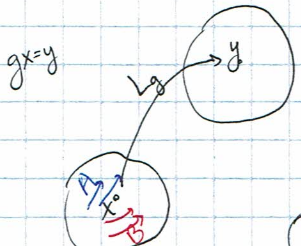
סימון:

בהינתן $v\in T_eG$, השדה הוקטורי הנ"ל מסומן v^ℓ: $v^\ell(g):=dL_g(v)$.

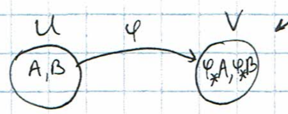
משפט:

אם A ו-B שדות וקטוריים שמורים משמאל, אז גם $[A,B]$ שמור משמאל.

הוכחה:



באופן כללי, אם φ דיפאומורפיזם כמו פה



אז $\varphi_*[A,B]=[\varphi_*A,\varphi_*B]$.

לכן גם $[A,B]$ שמורה משמאל.

□

סימון:

נסמן ב- $Lie(G)$ את מרחב השדות הוקטוריים השמורים משמאל. אז $Lie(G)$
היא תת-אלגברה לי של $\mathfrak{X}(G)$ ממימד n.

יש לנו זיהוי טבעי

$$T_eG \longleftrightarrow Lie(G)$$
$$v \longmapsto v^{\ell}$$
$$A(e) \longmapsfrom A.$$

נשרה את הפעולה $[\ ,\ ]$ על T_eG: כלומר עבור $v,w\in T_eG$ נגדיר
$$[v,w] := [v^{\ell}, w^{\ell}](e).$$

כלומר, כדי לחשב את $[v,w]$, צרק להרחיב מעט את v ואת w לסביבה של e.

את אלגברת לי של G נהוג גם לסמן $\mathfrak{g}$ (\mathfrak{g}).

<u>משפט:</u>

כל שדה וקטורי שמור משמאל הוא שלם.

<u>הוכחה:</u>

בסביבה U של e יש פתרון על $(-\varepsilon,\varepsilon)$. לכן לכל $g\in G$ אפשר להסתכל על הסביבה $L_g(U)$, וגם עליו יהיה פתרון על $(-\varepsilon,\varepsilon)$ – הדחיפה של הפתרון על U על ידי L_g. לכן לכל נקודה יש סביבה שבה מוגדר פתרון ב-$(-\varepsilon,\varepsilon)$, ועל ידי הרכבה נוכל לקבל כל זמן שרוצים. $\square$

28.11.18   7   יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה

קצת תיקוני סימונים:

יש יותר מדי L. נסמן נגזרת לי לפי שדה וקטורי A ע"י $\mathcal{L}_A$;

כפל משמאל באיבר a ע"י L_a;

אם $v\in T_eG$, v^l הוא השדה השמור משמאל המוגדר באמצעות v,

כלומר $v^l|_e=v$.

דוגמה:

ניקח $G=GL_n(\mathbb{R})$ (כנ"ל עם $\mathbb{C}$). מיהי $Lie(G)$?

$GL_n(\mathbb{R})$ קבוצה פתוחה ב-$M_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n^2}$. המשיק בכל נקודה הוא $M_n(\mathbb{R})$, בפרט ב-$e=I$.

בהינתן $v\in M_n(\mathbb{R})$, מהו השדה הווקטורי v^l? בהינתן $g\in GL_n$, L_g הוא כפל משמאל

ב-g, וזוהי העתקה לינארית. לכן $dL_g=L_g$, כלומר $v^l|_g=gv$.

סוגרי לי יהיו הביטוי $[v,w]=[v^l,w^l]_e=v^l|_e(w^l)-w^l|_e(v^l)$

מסילה המייצגת את v היא למשל $I+tv$; אז

$$[v,w]=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(I+tv)w-\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(I+tw)v=vw-wv.$$

לכן $Lie(GL_n(\mathbb{R}))=M_n(\mathbb{R})$ ומכפלת לי היא הקומוטטור הרגיל.

טענה:

אם G חבורת לי, אזי TG טריוויאלי (כלומר $TG=G\times\mathbb{R}^n$). יריעה המקיימת זו

נקראת ממוקבלת (parallelizable).

הוכחה:

יש n שדות וקטוריים בלתי-תלויים לינארית בכל נקודה.

אכן, אם $v_1,\dots,v_n$ בסיס של T_eG, אזי $v_1^l,\dots,v_n^l$ שדות וקטוריים שהם

בלתי-תלויים לינארית בכל נקודה של G;

$$\begin{aligned} G\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow TG\\ (g,a^1,\dots,a^n)&\longmapsto \sum_{i=1}^n a^i v_i^l|_g\end{aligned}$$

$\square$

טענה:

אם G חבורת לי, אזי $\pi_1(G,e)$ אבלית. (מספיק חבורה טופולוגית)

הוכחה:

יהיו $[\gamma],[\delta]\in\pi_1(G,e)$. אזי $[\gamma][\delta]=[\gamma*\delta]=[(\gamma*K_e)\overset{\text{כפל נקודתי}}{\cdot}(K_e*\delta)]$. יש הומוטופיות $H:\gamma*K_e\underset{\partial I}{\simeq}K_e*\gamma$, $K:K_e*\delta\underset{\partial I}{\simeq}\delta*K_e$.

אז $H\cdot K$ תהיה הומוטופיה ל- $[(K_e*\gamma)\cdot(\delta*K_e)]=[\delta][\gamma]$.

$\square$

טענה:

אם G חבורת לי קשירה (מספיק חבורה טופולוגית) ו-U סביבה פתוחה של e, אז U יוצרת את G.

הוכחה:

על ידי מעבר ל- $V=U\cap U^{-1}$ ($U^{-1}=\{x^{-1} \mid x\in U\}$) נקבל סביבה $V\subseteq U$ שהיא סימטרית, כלומר $V^{-1}=V$. נראה ש-V יוצרת את G, ולכן U יוצרת את G.

אז $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ היא תת-החבורה הנוצרת ע"י V, כאשר $V^n=\{a_1\cdot\ldots\cdot a_n \mid a_1,\ldots,a_n\in V\}$.

נטען כי אם $A\subseteq G$ קבוצה כלשהי ו- $V\subseteq G$ פתוחה, אז $AV=\{a\cdot v \mid a\in A, v\in V\}$ פתוחה.

אכן, $AV=\bigcup_{a\in A} aV$, כל aV פתוחה ולכן AV פתוחה.

U פתוחה, לכן V פתוחה, ומכאן שכל V^n פתוחה. לכן H פתוחה.

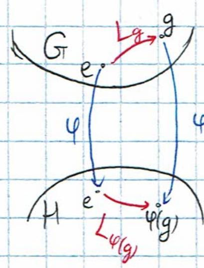
הראינו ש- $H\subseteq G$ תת-חבורה פתוחה, ולכן כל מחלקה aH היא פתוחה. המחלקות זרות, ומהקשירות של G נקבל שיש רק מחלקה אחת. □

הגדרה:

יהיו G ו-H חבורות לי. $\varphi:G\to H$ נקרא מורפיזם של חבורות לי, אם:

א. φ הומומורפיזם של חבורות.

ב. φ חלקה.



טענה:

$\varphi\circ L_g=L_{\varphi(g)}\circ\varphi$. בניסוח שקול, $\varphi=L_{\varphi(g)}\circ\varphi\circ L_g^{-1}$.

הוכחה:

$(\varphi\circ L_g)(x)=\varphi(L_g(x))=\varphi(gx)=\varphi(g)\varphi(x)=(L_{\varphi(g)}\circ\varphi)(x)$. □

אם כן, בסביבת g, φ נראית כמו $L_{\varphi(g)}\circ\varphi\circ L_g^{-1}$ כלומר היא נראית אותו דבר בכל נקודה - עוברים לסביבת e, מפעילים φ ועוברים לסביבת $\varphi(g)$.

בפרט, הדרגה של $d\varphi$ ב-g שווה לדרגה של $d\varphi$ ב-e. כלומר, φ העתקה בעלת דרגה קבועה! לכן יש קואורדינטות טובות שבהן ההעתקה לינארית.

בפרט, התמונה של חבורת לי היא גם תת-חבורת לי. זו כמובן תת-יריעה משוקעת ולא תת-יריעה משוכנת.

הגדרה:

יהיו $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ אלגבראות לי. $\varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ מורפיזם של אלגבראות לי אם הוא העתקה לינארית ומקיים $\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$.

טענה:

אם $\varphi: G \longrightarrow H$ מורפיזם של חבורות לי, אזי $d\varphi: T_eG \longrightarrow T_eH$ מורפיזם של אלגבראות לי.

הערה:

לא כל מורפיזם של אלגבראות לי נובע ממורפיזם של חבורות לי. למשל, אלגבראות לי של S^1 ושל $\mathbb{R}$ הן חד-מימדיות, ולכן יש איזומורפיזם מ-T_eS^1 ל-$T_e\mathbb{R}$. אבל אין מורפיזם מ-S^1 ל-$\mathbb{R}$! נראה בהמשך שזה נכון אם G פשוטת קשר.

הוכחת הטענה:

נניח בקואורדינטות הטובות סביב $e \in G$ ו- $e \in H$, שבהן φ היא העתקה לינארית T, ואז גם $d\varphi = T$ בכל נקודה בסביבה.

בהינתן $v, w \in T_eG$, תרצה לבדוק האם $d\varphi([v^\ell, w^\ell]_e) \overset{?}{=} [(d\varphi|_e(v))^\ell, (d\varphi|_e(w))^\ell]_e$.

$$T(v|_e(w^\ell) - w|_e(v^\ell)) \overset{?}{=} [(Tv)^\ell, (Tw)^\ell]_e$$

$$Tv(w^\ell) - Tw(v^\ell) \overset{?}{=} Tv((Tw)^\ell) - Tw((Tv)^\ell)$$

נראה $Tv(w^\ell) = Tv((Tw)^\ell)$. כנ"ל לביטויים האחרים, וכך נקבל שוויון.

ניקח מסילה γ שמייצגת את v. אזי $\overset{\varphi}{T} \circ \gamma$ מייצגת את $\overset{d\varphi}{T}v$.

$$Tv(w^\ell) = T\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} w^\ell|_{\gamma(t)}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(Tw^\ell|_{\gamma(t)}\right) = (*)$$

$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi \quad \Leftarrow \quad d\varphi \circ dL_g = dL_{\varphi(g)} \circ d\varphi \Leftarrow T \circ dL_g = dL_{\varphi(g)} \circ T$.

עוד נשים לב $w^\ell = dL_{\gamma(t)}(w) \quad \Leftarrow \quad Tw^\ell = T(dL_{\gamma(t)}(w)) = dL_{\varphi(\gamma(t))} \circ T(w)$. לכן

$$(*) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{dL_{\varphi(\gamma(t))} \circ T(w)}_{(Tw)^\ell|_{\varphi(\gamma(t))}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Tw)^\ell|_{\varphi(\gamma(t))} = Tv((Tw)^\ell)$$

כנדרש. $\square$

12.12.18

יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 8

הגדרה:

תהי G חבורת לי. תת-חבורת לי היא חבורת לי K עם מורפיזם חח"ע $i:K\hookrightarrow G$.
לכן בהכרח i שיקוע. נקבל כי di מורפיזם של אלגבראות לי, ומכאן שהתמונה היא תת-אלגברת לי.

מסקנה:

אם $K\subseteq G$ תת-חבורת לי, אז $T_eK\subseteq T_eG$ (הכלה ממש) היא תת-אלגברת לי.

חשוב לציין שהמבנה הטופולוגי של תת-חבורת לי אינו נובע מהמבנה הטופולוגי של החבורה הגדולה. אפשר לחשוב על תת-חבורת לי K כעל בתור $i(K)$, כשהמבנה הטופולוגי שלו מושרה מזה של K.

דוגמה:

ראינו בעבר פונקציה $\mathbb{R}\longrightarrow T=S^1\times S^1$ לפי $t\mapsto(e^{iat},e^{ibt})$. זהו מורפיזם חח"ע.

- אם $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, התמונה תהיה סגורה והומיאומורפית ל-S^1; זו תהיה תת-חבורת לי משוכנת.
- אם $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$, זו תהיה תת-חבורת לי משוקעת.

המוטיבציה לכך שדורשים שיקוע ולא שיכון היא כדי לקבל התאמה בין תת-אלגבראות לי לתת-חבורות לי. נראה אותה בהמשך.

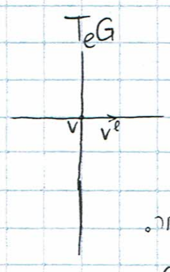
לכל $v\in T_eG$ הגדרנו את v^ℓ (השדה הווקטורי השמור משמאל המקיים $v^\ell|_e=v$), וראינו כי זהו שדה שלם. לכן קיימת זרימה $\varphi_t^v(g)$ עבור $t\in\mathbb{R}$.

הגדרה:

נגדיר את העתקת האקספוננט, $\exp:T_eG\longrightarrow G$, ע"י $\exp(v)=\varphi_1^v(e)$.

טענה:

העתקה $\exp$ חלקה.



הוכחה:

נתבונן ב-$T_eG\times G$. זו יריעה $2n$-מימדית. נגדיר שדה וקטורי כך: לכל $v\in T_eG$ יש עותק של G "שיושב" על G. על העותק הזה נשים את השדה הווקטורי v^ℓ, ו-0 ברכיב האחר.
נרצה להראות שזה שדה וקטורי חלק. (זו בעצם חלקות אם משנים גם את המשוואה באופן חלק)

(המשך ההוכחה)

אם נדע שזו העתקה חלקה, נקבל שהאקספוננט הוא גם חלק כהרכבה הבאה:

$$\begin{array}{ccccccc} T_eG & \longrightarrow & T_eG\times G\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi \text{ הזרימה}} & T_eG\times G & \xrightarrow{\text{הטלה}} & G \\ v & \longmapsto & (v,e,1) & \longmapsto & \Phi(v,e,1) & & \end{array}$$

כשהראינו שהשדה v^l חלק, ראינו שהוא בקואורדינטות מתקבל ע"י מטריצה מהצורה $\left(\frac{\partial m^i}{\partial x^j}\right)\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^n\end{pmatrix}$.

אז $\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^n\end{pmatrix}$ היה קבוע, אבל כעת הוא משתנה - אבל גם באופן חלק, כנדרש. $\square$

נקבע את v, ונביט בפונקציה של t $\gamma(t)=\varphi_t^v(e)$. כמובן, γ חלקה.

טענה:

$\gamma:\mathbb{R}\to G$ היא מורפיזם של חבורות לי, כלומר $\gamma(s+t)=\gamma(t)\cdot\gamma(s)$.

הוכחה:

נתחיל מטענה כללית על יריעות: תהי M יריעה, A שדה וקטורי על M עם זרימה $\varphi_t(x)$, ו- $h:M\to M$ דיפאומורפיזם. אזי $h(\varphi_t(x))$ הוא העקום האינטגרלי של h_*A המתחיל בנקודה $h(x)$, כלומר $h(\varphi_t^A(x))=\varphi_t^{h_*A}(h(x))$.

במקרה שלנו, לכל $g\in G$ מתקיים $L_g(\varphi_t^{v^l}(e))=\varphi_t^{(L_g)_*v^l}(L_g(e))=\varphi_t^{v^l}(g)$. כלומר

$$g\cdot\varphi_t^v(e)=\varphi_t^v(g).$$

נציב $g=\varphi_s^v(e)$. נקבל

$$\begin{array}{ccc} \varphi_s^v(e)\cdot\varphi_t^v(e) & = \varphi_t^v(\varphi_s^v(e)) = & \varphi_{t+s}^v(e) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \gamma(s)\cdot\gamma(t) & = & \gamma(t+s)=\gamma(s+t) \end{array}$$

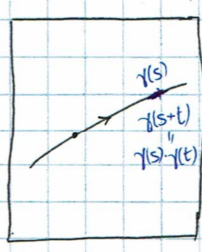
$\square$

הכיוון השני גם נכון: אם $\gamma:\mathbb{R}\to G$ מורפיזם (של חבורות לי), אז γ הוא העקום האינטגרלי של v^l כאשר $v=\gamma'(0)$.

הוכחה:

$\gamma(t)$ היא מסילה המייצגת את v ב- T_eG. ניקח s קבוע, ונביט במסילה $\gamma(s)\cdot\gamma(t)$. זו מסילה המייצגת את $dL_{\gamma(s)}|_e v$. אבל $\gamma(s)\cdot\gamma(t)=L_{\gamma(s)}\gamma(t)$, והערך של $dL_{\gamma(s)}v$ ב- $\gamma(s)$ הוא בדיוק $v^l(\gamma(s))$.

כאשר t בסביבת 0, $\gamma(s)\gamma(t)=\gamma(s+t)$, והערך שלה הוא בדיוק $v^l(\gamma(s))$.



במילים אחרות, יש שתי הסתכלויות על סביבת s: $\gamma(s+t)$ ו- $\gamma(s)\cdot\gamma(t)$. הן זהות, וזה בדיוק מראה שהשדה הווקטורי שלנו שמור משמאל, כלומר הוא חייב להיות v^l.

(המשך ההוכחה)

עוד הסבר, בלי קצת יותר: אם $\gamma(t)$ מייצגת את v ב-e ו-$g\in G$, אזי $L_g(\gamma(t))$ מייצגת את $dL_g(v)$ ב-g.

כעת, $\gamma(s)\cdot\gamma(t)$ מייצגת את הווקטור $dL_g|_e(v)=v^\ell(\gamma(s))$. אבל $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$, לכן $\gamma(s+t)$ מייצגת את $v^\ell(\gamma(s))$. מכאן שזהו עקום אינטגרלי של v^ℓ. $\square$

הראינו אם כן שיש התאמה חח"ע ועל בין הנקודות של אלגברת לי של החבורה לבין ההומומורפיזמים $\mathbb{R}\to G$.

יהי $a\in\mathbb{R}$. נתבונן ב-$\delta(t)=\gamma(at)$; זהו גם הומומורפיזם, והוא מתאים ל-av. כלומר $\varphi^v_{at}(e)=\varphi^{av}_t(e)$.

בלשון אקספוננטים, נציב $t=1$: $\varphi^v_a(e)=\exp(av)$. נציב בו בחזרה t:

$\exp(tv)=\varphi^v_t(e)$;

כלומר, $\exp(tv)$ הוא העקום האינטגרלי של v^ℓ המתחיל ב-e. בפרט, $\exp((t+s)v)=\exp(tv)\cdot\exp(sv)$.

יתרה מזאת, העקום האינטגרלי V ב-g הינו $\varphi^v_t(g)=g\cdot\exp(tv)$. במילים אחרות, $\varphi^v_t=R_{\exp(tv)}$.

נשים לב שהאפיון ע"י עקומות שהנגזרת שלהם ב-0 היא v אינה תלויה בכיוון של השדה השמור (שמור משמאל/מימין). היינו מקבלים את אותה העתקת אקספוננט, למרות שהזרימות שונות.

__טענה:__

יש העתקה $\exp: T_eG\to G$. היא משרה $dexp: \underset{\overset{\parallel}{T_eG}}{T_0T_eG}\to T_eG$. אזי $dexp=Id_{T_eG}$.

__הוכחה:__

לכל $v\in T_eG$ יש מסילה $t\cdot v$ שמייצגת אותו. התמונה של המסילה היא $\exp(tv)$. אבל זהו העקום האינטגרלי שנגזרתו ב-0 היא v, כנדרש. $\square$

ממשפט הפונקציה ההפוכה, יש סביבה U של 0 שעליה $\exp$ הוא דיפאומורפיזם. אנחנו נראה שאלו קואורדינטות מאוד טובות ונוחות להרבה מהמטרות שלנו, ולכן נרצה להשתמש בהן הרבה.

<u>דוגמה:</u>

מהי העתקת האקספוננט של $GL_n(\mathbb{R})$?

אנחנו יודעים כי $T_eGL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, ואם $v\in M_n(\mathbb{R})$ ו-$g\in GL_n(\mathbb{R})$, $v^\ell|_g = gv$.

נטען כי $\exp(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} =: e^v$.

למעשה, עלינו להראות כי העקום e^{tv} הינו העקום האינטגרלי של v^ℓ. אכן,

$$(e^{tv})'_{t=0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n v^n}{n!}\right)'_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1} v^n}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} v^{n-1}}{(n-1)!}\right)\cdot v = e^{tv}\cdot v = v^\ell|_{e^{tv}}.$$

מכאן גם מגיע השם של ההעתקה.

<u>טענה:</u>

$\exp$ היא העתקה טבעית מהפונקטור של אלגברות לי הנבנית מחבורות לי לפונקטור הזהות. כלומר, הדיאגרמה משמאל מתחלפת.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] & H \\ T_eG \arrow[u, "\exp_G"] \arrow[r, "dh"'] & T_eH \arrow[u, "\exp_H"'] \end{tikzcd}$$

<u>הוכחה:</u>

יהי $v\in T_eG$. נתבונן במסילה $\gamma(t) = h(\exp_G(tv))$. זו העתקה חלקה $\gamma:\mathbb{R}\to H$.

זהו הומומורפיזם, כי $\gamma(t+s) = h(\exp((t+s)v)) = h(\exp(tv)\cdot \exp(sv)) = h(\exp(tv))\cdot h(\exp(sv)) = \gamma(t)\cdot\gamma(s)$.

לכן $\gamma(t) = \exp_H(tu)$ עבור $u = \gamma'(0) = dh(v)$. כלומר $\gamma(t) = \exp_H(t\cdot dh(v))$.

נציב $t=1$, ונקבל $h(\exp_G(v)) = \exp_H(dh(v))$. □

אפשר להסתכל על הקואורדינטות בסביבות קטנות של e שבהן $\exp_G$ דיפאומורפיזם. בקואורדינטות האלו נקבל זיהוי בין G ל-T_eG ובין H ל-T_eH בסביבות מספיק קטנות של היחידות. בכך קיבלנו זיהוי בין h ל-dh. אז יש קואורדינטות וסביבות קטנות של היחידה שבהן **כל** הומומורפיזם נתון על ידי הדיפרנציאל שלו.

<u>מסקנה:</u>

תהי G קשירה, ונניח ש- $f,g: G\to H$ מורפיזמים כך ש-$df = dg$. אזי $f=g$.

<u>הוכחה:</u>

בקואורדינטות הנ"ל, f ו-g מזדהות על סביבה של e. אבל הוכחנו שבחבורות לי קשירה, סביבה של היחידה יוצרת את החבורה כולה. □

משפט:

תהי G חבורת לי, ותהי $K\subseteq T_eG$ תת-אלגברת לי. אזי קיימת תת-חבורה $H\subseteq G$ כך ש- $T_eH=K$. בנוסף, קיימת תת-חבורה קשירה יחידה כזו.

הוכחה:

נביט בהתפלגות $W(g)=dL_g(K)$. זו התפלגות חלקה: אם $v_1,\dots,v_n$ בסיס של K, אזי $v_1^l,\dots,v_n^l$ שדות וקטוריים חלקים שהם בסיס ל-$W(g)$ בכל נקודה g.

כמו כן, W לופפת:

$$\left[\sum_{i=1}^n f^i v_i^l,\ \sum_{j=1}^n g^j v_j^l\right]=\sum_{i,j}\left[f^i v_i^l,\ g^j v_j^l\right]$$

כל גורם הינו $f^i g^j \underbrace{[v_i^l, v_j^l]}_{=[v_i,v_j]^l} + f^i v_i^l(g^j)v_j^l - g^j v_j^l(f^i)v_i^l$, וזה משיק ל- W.

לפי משפט פרובניוס, קיימת יריעה אינטגרלית מקסימלית קשירה יחידה H העוברת ב-e.

נטען כי H תת-חבורת לי. נוכיח זאת בפעם הבאה.

משפט:

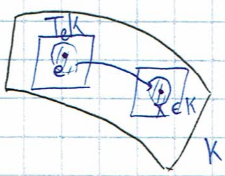
תהי G חבורת לי, ותהי $\mathfrak{h}\subseteq T_eG$ תת-אלגברת לי. אזי קיימת תת-חבורת לי $H\subseteq G$ כך ש-$T_eH=\mathfrak{h}$. בנוסף, יש רק H קשירה אחת כזו.

הוכחה:

בפעם הקודמת הגדרנו התפלגות $W(g)=dL_g(\mathfrak{h})$, והראינו שהיא לופפת. לכן קיימת תת-יריעה אינטגרלית (משוקעת) H קשירה מקסימלית יחידה שעוברת ב-e.

טענה: H תת-חבורה.

אכן, יהי $a\in H$. אז גם aH יריעה אינטגרלית (כי אם M יריעה אינטגרלית ביחס להתפלגות W, $L_g(M)$ יריעה אינטגרלית קשירה ביחס להתפלגות $dL_g(W)$, ואצלנו W נשמרת תחת dL_g). בנוסף, מתקיים $a\in aH$. לכן H ו-aH שתי יריעות אינטגרליות קשירות מקסימליות העוברות ב-a, לכן $H=aH$.
כך נכון לכל $a\in H$, כלומר H תת-חבורה.
עבור ההופכי, יהי $a\in H$. $a^{-1}H$ גם יריעה אינטגרלית קשירה מקסימלית ביחס ל-W העוברת ב-e, ולכן שוב $a^{-1}\in a^{-1}H=H$. לכן H תת-חבורה.



עבור יחידות. נניח ש-K עוד תת-חבורת לי קשירה כך ש-$T_eK=\mathfrak{h}$.
אזי K אינטגרלית (לכל $x\in K$, $xK=K$, לכן L_x מעתיק סביבה קטנה של e ב-K לסביבה קטנה של x ב-K, ומכאן $T_xK=dL_x(T_eK)$). לכן $K\subseteq H$.
אבל ראינו בפעם הקודמת שבסביבת e של תת-החבורה, תת-חבורה מתלכדת עם אלגברת לי שלה.
לכן סביבה קטנה של e ב-K מתלכדת עם סביבה קטנה של e ב-H. אולם K ו-H נוצרות ע"י סביבה קטנה כלשהי של e ב-H. לכן $K=H$.

$\square$

משפט:

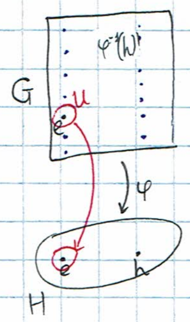
תהיינה G,H חבורות לי כך ש-H קשירה.
נניח ש-$\varphi:G\longrightarrow H$ הומומורפיזם כך ש-$d\varphi|_e$ איזומורפיזם. אזי φ הינו דיפאומורפיזם מקומי והעתקת כיסוי.

הוכחה:

ממשפט הפונקציה ההפוכה, φ דיפאומורפיזם בסביבת e. אבל כפי שטענו, אפשר להשתמש ב-L_g כדי להוכיח שזהו דיפאומורפיזם גם בסביבת g ($\varphi=L_{\varphi(g)}\circ\varphi\circ L_g^{-1}$).
φ על כי H קשירה, והתמונה מכילה סביבה של היחידה.

(המשך ההוכחה)

נזכור שאם U סביבה של היחידה, קיימת סביבה של היחידה סימטרית V כך ש-$V\cdot V\subseteq U$.



קיימת סביבה U של e ב-G כך ש-$\varphi|_U$ חח"ע. בפרט, $\varphi^{-1}(e)\cap U=\{e\}$.

לפי ההערה הנ"ל, קיימת סביבה סימטרית V של e ב-G כך ש-$V\cdot V\subseteq U$. יהי $h\in H$.

נסמן $W=h\cdot\varphi(V)$. זוהי סביבה של h. נשים ♡ $\varphi^{-1}(W)=\bigcup_{x\in\varphi^{-1}(h)} xV$,

וכי $\varphi|_{xV}$ דיפאומורפיזם על W.

הכל ברור חוץ מהזרות, כלומר שעבור $x\neq y\in\varphi^{-1}(h)$ xV ו-yV זרים. נניח בשלילה $z\in xV\cap yV$,

כלומר $xv_1=z=yv_2 \Leftarrow x=y\underbrace{v_2v_1^{-1}}_{\in U}$. לכן $\varphi(x)=\varphi(y)\cdot\underbrace{\varphi(v_2v_1^{-1})}_{=e}$, כלומר $v_2v_1^{-1}\in\varphi^{-1}(e)$.

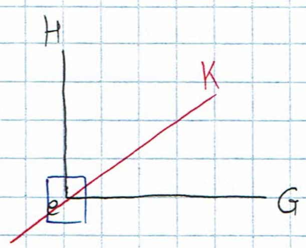
אבל $U\cap\varphi^{-1}(e)=\{e\}$, לכן $v_2v_1^{-1}=e \Leftarrow v_1=v_2 \Leftarrow x=y$, בסתירה. $\square$

ראינו שאם $\varphi:G\longrightarrow H$ מורפיזם של חבורות לי, $d\varphi:T_eG\longrightarrow T_eH$ מורפיזם של אלגבראות לי. נשאל האם בהינתן מורפיזם של אלגבראות לי $T:T_eG\longrightarrow T_eH$ קיים מורפיזם של חבורות לי $\varphi:G\longrightarrow H$ כך ש-$d\varphi|_e=T$.

נביט בחבורה $G\times G$. אזי $T_e(G\times H)=T_eG\oplus T_eH$. יהי $\Gamma\subseteq T_eG\oplus T_eH$ הגרף של T, כלומר $\Gamma=\{(x,Tx)\mid x\in T_eG\}$.

<u>טענה:</u>

Γ תת-אלגברת לי של $T_eG\oplus T_eH$. (תרגיל)



נניח ש-G קשירה. $dP_{G_e}|_\Gamma$ שולחת את (x,Tx) ל-x ולכן איזומורפיזם. לכן $P_G|_K$ דיפאומורפיזם מקומי והעתקת כיסוי.

נניח בנוסף ש-G פשוטת קשר. אז $P_G|_K$ הוא דיפאומורפיזם (כי הכיסוי היחיד של מרחב פשוט קשר הוא מסדר 1). כלומר זהו איזומורפיזם של חבורות לי.

נסמן $\varphi=P_H\circ(P_G|_K)^{-1}$. אזי $d\varphi=T$.

במילים, במקרה של חבורות לי פשוטות קשר, מורפיזמים של חבורות לי מתאימים באופן חח"ע ועל למורפיזמים של אלגבראות לי. כלומר, יש שקילות של קטגוריות מהקטגוריה של חבורות לי פשוטות קשר לקטגוריה של אלגבראות לי.

לא הוכחנו שכל אלגברת לי מתקבלת, כלומר שכל אלגברת לי איזומורפית לאלגברת לי של חבורת לי פשוטת קשר. זה נובע ממשפט Ado: כל אלגברת לי איזומורפית לתת-אלגברת לי של $M_n(\mathbb{R})$ עבור n מתאים. זה מסיים את ההוכחה, כי $\mathrm{Lie}(GL_n(\mathbb{R}))\cong M_n(\mathbb{R})$ (צריך לדאוג לפשטות קשר...)

במקרה הכללי יותר (G קשירה אך לא פשוטת קשר), הראינו שיש כיסוי (K,p) של G

$$\begin{tikzcd} T_eK \arrow[d, "dp"'] \arrow[dr, bend left, "d\varphi"] & \\ T_eG \arrow[r, "T"] & T_eH \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\exists\varphi"] & \\ G & H \end{tikzcd}$$

(איזומורפיזם)

כך שקיימת $\varphi: K \longrightarrow H$ (לא מ-G!) כך שמתקיים

$d\varphi = T\circ dp$.

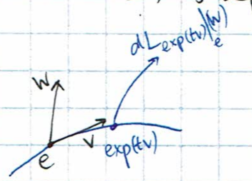
אם G פשוטת קשר, p איזומורפיזם של חבורות, $dp = Id_{T_eG}$, ומקבלים ממש $\varphi: G\longrightarrow H$.

ראינו בעבר שתי הגדרות שקולות ל-$[A,B]$:

$[A,B] = \mathcal{L}_A(B)$, $[A,B] = A\circ B - B\circ A$.

נרצה להבין מה ההגדרה השנייה אומרת על חבורות לי.

יהיו $v,w\in T_eG$. $[v,w]$ הוגדר על ידי $[v^l, w^l]$. אבל כפי שהזכרנו, $[v^l,w^l] = \mathcal{L}_{v^l}(w^l)$.



נזכור כי $w^l|_g = dL_g|_e(w)$.

ניקח $\gamma(t) = exp(tv)$ מסלה המייצגת את v. הווקטור שיושב ב-$exp(tv)$ הוא $dL_{exp(tv)}|_e(w)$. הזרימה של v הינה $\varphi_t^{v^l} = R_{exp(tv)}$. לכן אנו מסתכלים על

$$[v,w] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(dR_{exp(tv)}\right)\Big|_e^{-1}\left(dL_{exp(tv)}|_e(w)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dR_{exp(-tv)}\Big|_{exp(tv)} \circ dL_{exp(tv)}\Big|_e(w) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\left(R_{exp(tv)^{-1}}\circ L_{exp(tv)}\right)\Big|_e(w)$$

נסמן ב-$\xi_g : G\longrightarrow G$ את פעולת ההצמדה ב-g, כלומר $\xi_g(x) = gxg^{-1}$. אז

$$[v,w] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\xi_{exp(tv)}\Big|_e(w).$$

$\xi_g(e) = e$, לכן $d\xi_g|_e : T_eG\longrightarrow T_eG$.

נסתכל על ההעתקה $g\longmapsto d\xi_g|_e$. זו העתקה $Ad : G\longrightarrow GL(T_eG)$ שהיא הומומורפיזם של חבורות לי. הוא גם חלק. זה משרה העתקה

$dAd_e = ad : T_eG \longrightarrow T_e(GL(T_eG)) = End(T_eG)$.

לפי הכלל שפיתחנו, נקבל $ad(v)(w) = [v,w]$. אז בעצם $ad(v)$ היא המקבילה של L_v, כלומר זו העתקת הכפל משמאל ב-v.

<u>מסקנה:</u>

אם G אבלית, אז T_eG אבלית.

אם G קשירה, גם הכיוון ההפוך נכון.

הוכחה:

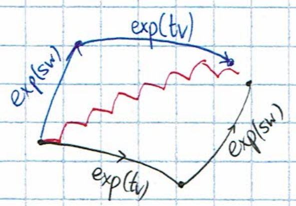
אם G אבלית, Ad הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי, לכן $ad=0$, כלומר T_eG אבלית.

עכשיו נניח ש- G קשירה, והמכפלה ב-T_eG טריוויאלית. לכן $ad(v)(w)=0$ לכל v,w.

לכן $ad(v)=0$ לכל v, כלומר ad היא העתקת האפס. זה אומר ש- $dAd=0$ בכל נקודה של G, ומקשירות של G נקבל ש- Ad קבועה, כלומר $Ad(g)=Id_{T_eG}$ לכל $g\in G$.
בקואורדינטות של האקספוננט, ξ_g מתלכד בסביבה קטנה עם $d\xi_g|_e$, לכן הוא הזהות. וכיוון שכל סביבה קטנה של e יוצרת את G, סיימנו.

$\square$

משפט:



יהיו $v,w\in T_eG$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\exp(\frac{v}{n})\cdot\exp(\frac{w}{n})\right)^n=\exp(v+w)$.

הוכחה:

ראשית, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\exp(tv)\exp(tw)\right)=v+w$.

נזכור כי $d(\exp)^{-1}=Id$, ולכן גם $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp^{-1}(\exp(tv)\cdot\exp(tw))=v+w$.

מכאן $\exp^{-1}(\exp(tv)\cdot\exp(tw))=t\cdot(v+w)+R(t)$, כאשר $\frac{R(t)}{t}\xrightarrow[t\to0]{}0$. לכן אם נפעיל exp נקבל $\exp(tv)\cdot\exp(tw)=\exp(t(v+w)+R(t))$.

ניקח $t=\frac{1}{n}$.

$$\exp(\tfrac{v}{n})\cdot\exp(\tfrac{w}{n})=\exp\left(\tfrac{1}{n}(v+w)+R(\tfrac{1}{n})\right)$$
$$\left(\exp(\tfrac{v}{n})\cdot\exp(\tfrac{w}{n})\right)^n=\exp\left(\tfrac{1}{n}(v+w)+R(\tfrac{1}{n})\right)^n\underset{\exp(u)^n=\exp(nu)}{=}\exp\left((v+w)+n\cdot R(\tfrac{1}{n})\right)$$

אבל $n\cdot R(\frac{1}{n})=\frac{R(1/n)}{1/n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. כיוון ש- exp רציפה, אם נשאיף את n לאינסוף נקבל את הדרוש.

$\square$

הערה:

אם יודעים את $[x,y]$, יש נוסחה מפורשת עבור הביטוי $\exp(x)\cdot\exp(y)=\exp(M(x,y))$.

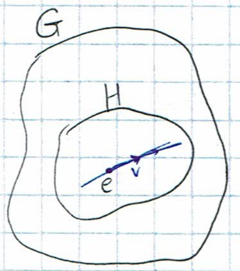
$$M(x,y)=x+y+\tfrac{1}{2}[x,y]+\tfrac{1}{12}\left([x,[x,y]]+[y,[y,x]]\right)+\dots$$

לא ניכנס לזה. זו נוסחת קמפבל - האוסדורף - בקר.

משפט: (משפט תת-החבורה הסגורה)

תהי G חבורת לי, ותהי $H\subseteq G$ תת-חבורה סגורה. אזי H תת-חבורת לי.

הוכחה:



נגדיר $L\subseteq T_eG$ באופן הבא:

$$L=\{v\in T_eG \mid \exp(tv)\in H \quad ,t\in\mathbb{R} \text{ לכל}\}.$$

התנאי הנ"ל שקול לכך ש- $\exp(tv)\in H$ לכל $0<t<\varepsilon$ (אכן, $(0,\varepsilon)$ יוצר את $\mathbb{R}$ כחבורה חיבורית, ולכן אם זה יהיה נכון עבור $(0,\varepsilon)$ זה יהיה נכון תמיד). לכן מספיק להצטמצם לסביבה קטנה שבה $\exp$ היא דיפאומורפיזם.

נרצה להראות ש-L היא תת-אלגברת לי המתאימה ל-H.

טענה: L תת-מרחב לינארי.

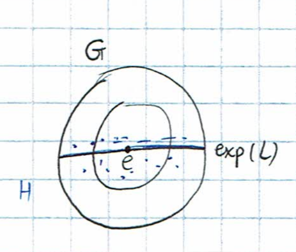
הוכחה: הסגירות תחת כפל בסקלר ברורה. נראה ש-L סגור תחת חיבור.

יהיו $v,w\in L$. אזי לכל $t\in\mathbb{R}$,

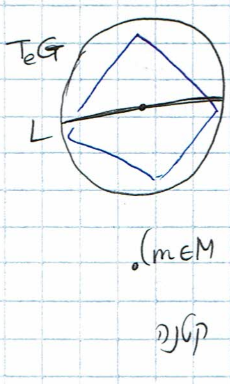
$$\exp(t(v+w)) = \lim_{n\to\infty}\Big(\underset{\in H}{\exp(\tfrac{tv}{n})}\cdot\underset{\in H}{\exp(\tfrac{tw}{n})}\Big)^n.$$

כיוון ש- H סגורה, נקבל $\exp(t(v+w))\in H$, כלומר $v+w\in L$. $\square$

נראה שעבור סביבה U מספיק קטנה של e מתקיים $H\cap U=\exp(L)\cap U$. כלומר, בקואורדינטות האקספוננט, $H\cap U$ מתלכד עם $L\cap U$. כי בדיוק ההגדרה שלנו לתת-יריעה - לכל נקודה יש סביבה שבה החיתוך שלה עם תת-היריעה הוא תת-מרחב לינארי. אמנם נראה את זה רק ל-e, אבל לכל $h\in H$ הסביבה hU תהיה טובה כנ"ל.



נניח בשלילה שלא קיימת סביבה כנ"ל. נשים לב ש- $\exp(L)\subseteq H$, ולכן תמיד $\exp(L)\cap U\subseteq H\cap U$. לכן קיימת סדרת נקודות $x_n\to e$ כך שלכל n, $x_n\in H$ אבל $x_n\notin \exp(L)$.



ב- T_eG, יהי M תת-מרחב שהוא מחובר ישר של L כמרחבים לינאריים. כלומר

$$T_eG=L\oplus M$$

(ולא צריך תת-אלגבראות לי).

תהי $f: T_eG\longrightarrow G$ הנתונה ע"י $f(\ell+m):=\exp(\ell)\cdot\exp(m)$ $(\ell\in L \quad m\in M)$.

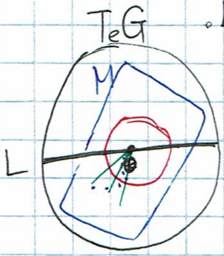
בתרגיל בית הוכחנו כי הדיפרנציאל של ההעתקה f הוא הזהות, ולכן יש סביבה קטנה שבה זהו דיפאומורפיזם.

(המשך ההוכחה)

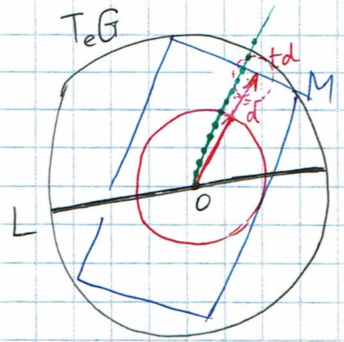
מכאן שקיימות שתי סדרות, $a_n\in L$ ו- $b_n\in M$, כך ש- $x_n=\exp a_n\cdot\exp b_n\longrightarrow e$.

כיוון שזהו דיפאומורפיזם, $(a_n,b_n)\longrightarrow(0,0)$, כלומר $a_n\longrightarrow 0$ ו- $b_n\longrightarrow 0$.

נשים לב ש- $\exp b_n\in H$ (כי $x_n, \exp a_n\in H$). בנוסף, לכל n בהכרח $b_n\neq 0$ (אחרת $x_n=\exp a_n\in\exp(L)$).



אז הצלחנו לשפר את הסדרה x_n כך שכל איברי b_n יהיו במחובר ישר של L. נשפר אותה עוד קצת. נסתכל על ספירת היחידה ב-M. אפשר להטיל כל b_n לספירה ע"י חלוקה בנורמה שלו. אבל ספירת היחידה היא קומפקטית, ולכן נוכל למצוא תת-סדרה של b_n שלא רק מתכנסת ל-0, אלא שגם הכיוונים שלה מתכנסים לאיזשהו כיוון d. נניח שזו b_n.



כיוון ש- $(\exp b_n)^m=\exp(mb_n)$, נקבל ש- $\exp(mb_n)\in H$ לכל m.

יהי $\varepsilon>0$, $0<t<\varepsilon$, ונסתכל על td. נרצה להיעזר בסדרה b_n כדי להתקרב אליו כמה שיותר, כדי להראות ש- $\exp(td)\in H$.

נעשה זאת כך: ניקח סביבה קטנה של td. נתקדם מספיק בסדרה b_n עד שהכיוונים שלה יחתכו את הסביבה הקטנה (הכיוונים כישרים אינסופיים). לאחר מכן, נתקדם עוד בסדרה b_n עד שהאיבר b_n יהיה מספיק קטן כדי שיהיה איזשהו m שעבורו $m\cdot b_n$ בסביבה שבחרנו. זה מראה שבכל סביבה של td אפשר להתקרב עם איבר $m\cdot b_n$ שהאקספוננט שלו נמצא ב- H; מהסגירות של H, נקבל $\exp(td)\in H$.

אבל כעת קיבלנו $d\in L$. נזכור כי d היה כיוון על ספירת היחידה ב-M, כלומר בפרט $0\neq d\in M$. אבל זו סתירה! □

מעכשיו נראה כל מיני דוגמאות. עד כה ראינו רק חבורת לי יחידה - GL_n. כעת נוכל להשתמש בכל המשפטים שלמדנו כדי ללמוד את GL_n וכל מיני תת-חבורות לי מעניינות שלה.

מתוך ההוכחה, אנחנו רואים איך לבנות את המרחב המשיק לתת-חבורה סגורה H- אוסף האיברים $v\in T_eG$ כך שלכל $t\in\mathbb{R}$, $\exp(tv)\in H$. למעשה זה נכון לכל תת-חבורות לי.

דוגמה:

כיצד נראית Ad ב-$GL_n(\mathbb{R})$? לפי תרגיל בית, לכל $g\in GL_n(\mathbb{R})$ ו-$v\in T_eGL_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$,

$Ad(g)v=gvg^{-1}$.

כמו כן, ראינו כי $ad=d\,Ad$ בדיוק נותן את מכפלת לי באלגברת לי, כלומר

$ad(v)(w)=[v,w]$.

בהינתן $v\in M_n(\mathbb{R})$, ניקח מסילה $\gamma(t)$ שנגזרתה ב-0 היא v ו-$\gamma(0)=e=I$. אזי באמת

$$ad(v)(w)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\gamma(t)w\gamma(t)^{-1}\right)=\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t)\right)w\gamma(0)^{-1}+\gamma(0)w\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t)^{-1}\right)=vw-wv$$

דוגמה:

נגדיר $O_n\subseteq GL_n(\mathbb{R})$ לפי $O_n=\{A\in GL_n(\mathbb{R})\mid AA^T=I\}$.

אם ניקח $f:GL_n(\mathbb{R})\longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ לפי $f(A)=AA^T$, אז $O_n=f^{-1}(I)$, ולכן O_n תת-חבורה סגורה - ומכאן תת-חבורת לי של $GL_n(\mathbb{R})$.

למעשה, זו תת-חבורה קומפקטית. אכן, אם נרחיב את f ל-$f:M_n(\mathbb{R})\longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, עדיין $O_n=f^{-1}(I)$. אבל $M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$; O_n סגורה כפי שציינו, וחסומה (סכום הריבועים בכל עמודה של מטריצה אורתוגונלית הוא 1, לכן סכום ריבועי האיברים במטריצה הוא n). לכן O_n קומפקטית.

מהי $T_e(O_n)$? מהגדרת המשפט, $T_e(O_n)=\{v\in M_n(\mathbb{R})\mid e^{tv}\in O_n\ \text{לכל}\ t\}$. רוצים

$$e^{tv}\cdot(e^{tv})^T=I$$
$$\Updownarrow$$
$$e^{tv}\cdot e^{tv^T}=I$$
$$\Updownarrow$$
$$e^{tv^T}=(e^{tv})^{-1}=e^{-tv}$$

עבור t מספיק קטן, אנו יודעים ש-$\exp$ חח"ע. לכן $tv^T=-tv\Leftarrow v^T=-v$.

לכן $v\in T_e(O_n)$ אם ורק אם v אנטי-סימטרית. הראינו

$T_e(O_n)=\{\text{המטריצות האנטי-סימטריות}\}=\mathfrak{o}_n$.

בפרט, $\dim O_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

נשים לב ש-O_n אינה קשירה. נגדיר $SO_n=\{A\in O_n\mid \det A=1\}=O_n\cap SL_n(\mathbb{R})$. זו תת-יריעה פתוחה של O_n, ולכן יש לה אותו מימד כמו של O_n.

תרגיל - SO_n קשירה.

דוגמה:

נעבוד מעל $\mathbb{C}$. נגדיר $U_n = \{A\in GL_n(\mathbb{C}) \mid AA^*=I\}$. משיקולים דומים, U_n תת-חבורה סגורה של $GL_n(\mathbb{C})$, ואפילו קומפקטית. אז זו תת-חבורת לי.

משיקולים דומים נקבל $T_e(U_n)=\{A\in M_n(\mathbb{C}) \mid A^*=-A\}=\mathfrak{u}_n$ המטריצות האנטי-הרמיטיות.

ניתן להגדיר $SU_n=\{A\in U_n \mid \det A=1\}=U_n\cap SL_n(\mathbb{C})$. הפעם זו תת-יריעה ממימד נמוך יותר.

אכן, נחשב את אלגברת לי שלה. בקואורדינטות של ה-exp, אלגברת לי מתלכדת עם חבורת לי בסביבת היחידה, לכן אלגברת לי של SU_n תהיה חיתוך אלגבראות לי של U_n ושל $SL_n(\mathbb{C})$. אנו יודעים כי

$$T_e(SL_n(\mathbb{C}))=\{A\in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A=0\}$$

(ראינו עבור $SL_n(\mathbb{R})$, זה דומה עבור $SL_n(\mathbb{C})$).

בפעם הבאה נבנה הומומורפיזם $S^3\cong SU_2 \longrightarrow SO_3$ שיהיה כיסוי כפול פשוט קשר.

2.1.19 — יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 11

דוגמה:

נחזור להסתכל על SU_2. כיריעה זוהי S^3, ואלגברת לי המתאימה לה היא
$su_2=\{A\in M_2(\mathbb{C}) \mid A^*=-A,\ tr\,A=0\}=\left\{\begin{pmatrix} xi & -y+zi \\ y+zi & -xi\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$.

נרצה להבין את $Ad: SU_2\longrightarrow GL(su_2)$, שכזכור מוגדר לפי $Ad(g)(v)=gvg^{-1}$.

ל- su_2 יש בסיס מתבקש: $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$.

הדטרמיננטה של מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} xi & -y+zi \\ y+zi & -xi\end{pmatrix}$ היא $x^2+y^2+z^2$. אבל
$\det gvg^{-1}=\det v$,

כלומר Ad משמר את הדטרמיננטה. לכן $Ad(g)\in O_3$, ומכיוון ש- SU_2 קשיר
נקבל ש- $Ad(g)\in SO_3$. אז אפשר לפרש את Ad כהומומורפיזם $Ad: SU_2\longrightarrow SO_3$.
(Ad משמר את הדטרמיננטה, כלומר את הנורמה - כי הדטרמיננטה היא ריבוע הנורמה
האוקלידית. לכן הוא משמר גם את המכפלה הפנימית, ומכאן הסקנו $Ad(g)\in O_3$).

אפשר לוודא כי $SU_2=\left\{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{pmatrix} \mid \substack{a,b\in\mathbb{C} \\ |a|^2+|b|^2=1}\right\}$. מהו $\ker Ad$? לפי ההגדרה,
$\ker Ad=\{g \mid gvg^{-1}=v \quad ,v \text{ לכל}\}$

כלומר $gv=vg$ לכל v. נתחיל לחשב:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} ia & -i\bar{b} \\ -ib & -i\bar{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ia & i\bar{b} \\ ib & -i\bar{a}\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$b=0$$

עוד נמשיך:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 0 & i\bar{a} \\ ia & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & ia \\ i\bar{a} & 0\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{a}=a$$
$$\Downarrow$$
$$a=r\in\mathbb{R}$$

לכן קיבלנו שהמטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix}$. אבל הדטרמיננטה שלה היא 1, לכן $r^2=1$,
כלומר $r=\pm 1$. כלומר $\ker Ad=\{I,-I\}$.

בפרט, $Ad(g)=Ad(h)$ אם ורק אם $g=\pm h$.

לכן בסביבת I, Ad הוא חח"ע. dAd מתלכד עם Ad בסביבה קטנה של I בקואורדינטות של $\exp$. $dAd: T_e SU_2 \longrightarrow T_e SO_3$ העתקה לינארית חח"ע בין מרחבים וקטוריים ממימד 3, לכן היא על. כיוון ש- SU_2 ו- SO_3 קשירים, Ad דיפאומורפיזם מקומי שהוא העתקת כיסוי מסדר 2.

מפני ש- $\pm A$ מתאימים נקודות אנטיפודיות תחת הזיהוי עם S^3, נקבל שכירעה SO_3 היא $\mathbb{R}P^3$.

איך זה שימושי? אם יש מורפיזם $T_e GL_n \longrightarrow SO_3$, לא תמיד אפשר לממש אותו כמורפיזם של $SO_3 \longrightarrow GL_n$. אבל, כיוון ש- SU_2 פשוט קשר, תמיד אפשר להרכיב

$$SU_2 \longrightarrow SO_3 \longrightarrow T_e GL_n$$

ולקבל $SU_2 \longrightarrow GL_n$ שמשרה את ההרכבה.

תבניות דיפרנציאליות

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי n מעל $\mathbb{R}$. תבנית אנטי-סימטרית (מתחלפת) מסדר k על V היא

$$\varphi: \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

שהיא לינארית בכל רכיב ואנטי-סימטרית (=מתחלפת).

- לינאריות: $\varphi(x_1,\dots, ax_i+by_i,\dots,x_k) = a\cdot\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k) + b\cdot\varphi(x_1,\dots,y_i,\dots,x_k)$.
- אנטי-סימטריות: לכל $\sigma\in S_k$, $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}\,\sigma\cdot\varphi(x_1,\dots,x_k)$.

דוגמה:

ב- $\mathbb{R}^n$, בהינתן $1\le i_1,\dots,i_k\le n$, נגדיר תבנית מתחלפת $E^{i_1,\dots,i_k}$ באופן הבא:

נחשוב על $v_1,\dots,v_n$ כעל מטריצה $n\times k$, ונגדיר

$$E^{i_1,\dots,i_k}(v_1,\dots,v_n) = \det\underbrace{\begin{pmatrix} \text{— השורה ה-}i_1\text{ —} \\ \text{— השורה ה-}i_2\text{ —} \\ \vdots \\ \text{— השורה ה-}i_k\text{ —}\end{pmatrix}}_{\text{מטריצה } k\times k}.$$

הערות:

א. אם האינדקסים $i_1,\dots,i_k$ אינם שונים זה מזה, $E^{i_1,\dots,i_k}=0$.

ב. אם $j_1,\dots,j_k$ מתקבלים מ- $i_1,\dots,i_k$ על ידי תמורה σ, אזי

$$E^{j_1,\dots,j_k} = \mathrm{sgn}\,\sigma\, E^{i_1,\dots,i_k}$$

נסמן את מרחב התבניות המתחלפות על V מסדר k ע"י $\Lambda^k(V)$.

<u>טענה:</u>

האוסף $\{E^{i_1,\dots,i_k} \mid 1\le i_1<\dots<i_k\le n\}$ הוא בסיס ל- $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

<u>הוכחה:</u>

בת"ל נניח $\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1,\dots,i_k} E^{i_1,\dots,i_k}=0$. צריך להוכיח שכל המקדמים הם 0.

נציב וקטורי יחידה. נשים לב כי

$$E^{i_1,\dots,i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k})=\begin{cases}0, & i_1,\dots,i_k \text{ לא שונים זה מזה} \\ 0, & j_1,\dots,j_k \text{ לא שונים זה מזה או שהם שונים אך לא מתלכדים עם הקבוצה } \{i_1,\dots,i_k\} \\ \operatorname{sgn}\sigma, & i_1,\dots,i_k \text{ שונים זה מזה}, \; j_{\sigma(m)}=i_m\end{cases}$$

לכן אם נציב את $e_{j_1},\dots,e_{j_k}$, נקבל $a_{j_1,\dots,j_k}=0$.

פורשת

$$\varphi\left(\sum a_1^i e_i,\dots,\sum a_k^i e_i\right)=\sum_{i_1,\dots,i_k}\underbrace{a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_k^{i_k}\,\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_k})}_{(*)}=$$

$$=\sum_{i_1,\dots,i_k \text{ שונים}}(*)=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\underbrace{\left(\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma\, a_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots a_k^{i_{\sigma(k)}}\right)}_{E^{i_1,\dots,i_k}\text{(הווקטורים שהתחלנו איתם)}}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$$

$\square$

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{R}$. בהינתן $\varphi\in\Lambda^k(V)$ ו- $\psi\in\Lambda^\ell(V)$, נגדיר את $\varphi\wedge\psi\in\Lambda^{k+\ell}(V)$ ע"י

$$\varphi\wedge\psi(v_1,\dots,v_{k+\ell})=\frac{1}{k!\cdot\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\varphi(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\cdot\psi(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+\ell)})$$

<u>טענה:</u>

$$E^{i_1,\dots,i_k}\wedge E^{j_1,\dots,j_\ell}=E^{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_\ell}.$$

<u>הוכחה:</u>

אנו נבדוק כאשר $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_\ell$ שונים. אחרת, נשאיר כתרגיל לבדוק ששני הצדדים הם 0. מההערות הנ"ל, אפשר להניח גם כי $i_1<\dots<i_k<j_1<\dots<j_\ell$. אפשר כעת להציב כל איבר בסיס. אם נציב משהו שאינו $e_{i_1},\dots,e_{i_k},e_{j_1},\dots,e_{j_\ell}$, נקבל 0 בשני הצדדים. אם נציב את אותו איבר טוב, בסכימה שהגדירה את $\wedge$ נקבל 1 בדיוק $k!\cdot\ell!$, וזה יצטמצם עם הקבוע שלנו.

$\square$

__טענה:__

הפעולה $\wedge$ היא בילינארית ואסוציאטיבית.

__הוכחה:__

הבילינאריות ברורה. עבור האסוציאטיביות, מספיק לבדוק על $E^{i_1,\dots,i_k}$. אם כל האינדקסים שונים, נקבל פשוט את שרשור סדרות האינדקסים, ולכן שוויון. אחרת, הכל יצא 0. $\square$

__טענה:__

הפעולה $\wedge$ אנטי-סימטרית, כלומר אם $\varphi\in\Lambda^k(V)$ ו-$\psi\in\Lambda^l(V)$, $\psi\wedge\varphi=(-1)^{k\cdot l}\varphi\wedge\psi$.

__הוכחה:__

$$E^{i_1,\dots,i_k}\wedge E^{j_1,\dots,j_l}=E^{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}$$

$$E^{j_1,\dots,j_l}\wedge E^{i_1,\dots,i_k}=E^{j_1,\dots,j_l,i_1,\dots,i_k}$$

והם נבדלים ב-$(-1)^{k\cdot l}$. $\square$

__הערה:__

$E^1,\dots,E^n\in\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ הוא הבסיס הדואלי לבסיס הסטנדרטי. באופן כללי, $\Lambda^1(V)=V^*$. נקבל $E^{i_1,\dots,i_k}=E^{i_1}\wedge E^{i_2}\wedge\dots\wedge E^{i_k}$.

בנוסף, אם $\dim V=n$, $\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}$. למשל עבור $k=0$, $\Lambda^0(V)=\mathbb{R}$.

__הגדרה:__

תהי M יריעה חלקה. תבנית דיפרנציאלית φ מסדר k על M היא בחירה חלקה של תבנית מתחלפת בכל $\Lambda^k(T_xM)$. בחירה חלקה משמעה שלכל k שדות וקטורים חלקים על M, ההצבה שלהם ב-φ היא פונקציה חלקה.

מרחב כל התבניות הדיפרנציאליות מסדר k מסומן $\Omega^k(M)$. בפרט,

- $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$.
- $\Omega^1(M)=$ מרחב השדות הקו-וקטורים על M.

נגדיר את ה"בחירה החלקה" באופן אחר. בהינתן קואורדינטות $x^1,\dots,x^n$ בסביבה $\mathcal{U}$, $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ הם בסיס בכל נקודה, והבסיס הדואלי לו הוא $dx^1,\dots,dx^n$. לכן בסיס ל-$\Omega^k(M)$ בכל נקודה הוא $\{dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\mid i_1<\dots<i_k\}$. לכן תבנית על $\mathcal{U}$ תירשם באופן

$$\varphi(x^1,\dots,x^n)=\sum_{i_1<\dots<i_k}a_{i_1,\dots,i_k}(x^1,\dots,x^n)\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}.$$

φ תיקרא חלקה אם הפונקציות $a_{i_1,\dots,i_k}(x^1,\dots,x^n)$ כולן חלקות.

תרגיל:

ההגדרה האחרונה שקולה לחלקות שכתבנו בהגדרה. בפרט, זה לא תלוי בקואורדינטות.

יהיו $\varphi\in\Omega^k(M)$ ו- $\psi\in\Omega^l(M)$, אזי מוגדר $\varphi\wedge\psi\in\Omega^{k+l}(M)$ לפי

פעולת ה-$\wedge$ בכל נקודה, והוא חלק. זה מגדיר העתקה $\Omega^k(M)\times\Omega^l(M)\longrightarrow\Omega^{k+l}(M)$.

אם $\varphi\in\Omega^k(M)$ ו- $\psi\in\Omega^l(M)$, כיוון שהכפל מוגדר נקודתית נקבל $\psi\wedge\varphi=(-1)^{k\cdot l}\varphi\wedge\psi$.

בנוסף, מתקיימת אסוציאטיביות.

נגדיר דיפרנציאל של תבניות דיפרנציאליות, $d:\Omega^k M\longrightarrow\Omega^{k+1}M$, כך: בקואורדינטות,

$$d\left(\sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1,\dots,i_k}(x)\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\right)=\sum_{i_1<\dots<i_k} \underbrace{da_{i_1,\dots,i_k}}_{\text{הדיפרנציאל המוכר והאהוב של פונקציות}}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}=(*)$$

ניזכר שבקואורדינטות, $df=\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n$, שזו באמת תבנית ב-$\Omega^1(M)$. לכן

$$(*)=\sum_{i_1<\dots<i_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^j}dx^j\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}.$$

כל $(k+1)$-יה מתקבלת $k+1$ פעמים.

בצורה יותר קומפקטית, $d(f\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})=df\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ ביחד עם לינאריות.

זה נכון גם אם יש אינדקסים חוזרים וגם אם הסדר לא נכון.

טענה: (תכונות)

א. עבור פונקציה $f\in\Omega^0M$, df הוא ה-d המוכר על פונקציות.

ב. $d\circ d=0$.

הוכחה:

א. ברור.

ב. מספיק לבדוק על כל מחובר בנפרד. נעזר בהסכם הסכימה של איינשטיין. אם

$$\varphi=f\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

אז

$$d\varphi=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

$$\Downarrow$$

$$dd\varphi=\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i}_{\text{נוכיח שזה }=0}\wedge\underbrace{(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k})}_{\text{קבוע בסכום}}$$

כש- $i=j$, $dx^i\wedge dx^j=0$. אם $i\neq j$, מופיעים שני המחוברים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i$

ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}dx^i\wedge dx^j$. אבל $dx^i\wedge dx^j=-dx^j\wedge dx^i$, והנגזרות שוות. $\square$

<u>טענה:</u> (המשך התכונות)

ג. $d:\Omega^k \longrightarrow \Omega^{k+1}$ לינארית.

ד. אם $\varphi\in\Omega^k(M)$ ו- $\psi\in\Omega^l(M)$, אז $d(\varphi\wedge\psi)=d\varphi\wedge\psi+(-1)^k\varphi\wedge d\psi$.

<u>הוכחה:</u>

ד. שוב מספיק להוכיח עבור $\varphi=f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ ועבור $\psi=g\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}$.

$$\varphi\wedge\psi=f\cdot g\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}$$

$$d(\varphi\wedge\psi)=d(f\cdot g)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}=(df\cdot g+f\cdot dg)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}=$$

$$=(df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})\wedge(g\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l})+(-1)^k(f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})\wedge(dg\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l})=$$

$$=d\varphi\wedge\psi+(-1)^k\varphi\wedge d\psi$$

$\square$

<u>טענה:</u>

d שהגדרנו אינה תלויה בקואורדינטות. למעשה, נראה ש-d היא ההעתקה היחידה המקיימת את תכונות א'-ד' הנ"ל.

<u>הוכחה:</u>

$$d\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_k}a_{i_1,\ldots,i_k}\,dy^{i_1}\wedge\ldots\wedge dy^{i_k}\Big)\overset{\text{לינאריות}}{=}\sum_{i_1<\cdots<i_k}d(a_{i_1,\ldots,i_k}\,dy^{i_1}\wedge\ldots\wedge dy^{i_k})\overset{\text{לייבניץ}}{=}$$

$$=\sum_{i_1<\cdots<i_k}d(a_{i_1,\ldots,i_k}(y^1,\ldots,y^n))\wedge dy^{i_1}\wedge\ldots\wedge dy^{i_k}$$

וכל שאר המחוברים מלייבניץ מתאפסים כי $d\circ d=0$.

$\square$

עוד תכונה: d תלוי רק בערכים בסביבה קטנה של הנקודה. השתמשנו בזה כשכתבנו את הכל בקואורדינטות בסביבת נקודה.

<u>משפט:</u> (למת פואנקרה)

בקבוצה פתוחה וקמורה U ב-$\mathbb{R}^n$, אם $\varphi\in\Omega^k U$ מקיים $d\varphi=0$, אז יש $\psi\in\Omega^{k-1}U$ כך ש- $\varphi=d\psi$.

בתקווה, נוכיח אותה בהמשך הקורס.

הערה:

אמרנו ש- $\Lambda^0(V)=\mathbb{R}$. אז איך מוגדר הכפל? אם $a\in\Lambda^0$ ו- $\psi\in\Lambda^k$, אז $a\wedge\psi=a\psi$.

זה גם מסתדר עם הנוסחה שלנו של הכפל, כי

$$a\wedge\psi=\frac{1}{0!\cdot k!}\sum_{\sigma\in S_{k+0}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a\cdot\psi(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})=a\cdot\psi.$$

נרצה שההעתקה $M\longmapsto\Omega^k M$ תהיה (קו)פונקטור. אז צריך להבין מה היא עושה להעתקות.

יהי V ממימד n ו- W ממימד m. נזכור כי $\Lambda^0(V)=\mathbb{R}$ וכי $\Lambda^1(\mathbb{R})=V^*$.

בהינתן $T:V\to W$, אפשר להגדיר $T^*:W^*\to V^*$ לפי $T^*(\varphi)=\varphi\circ T$.

במפורש, $T^*(\varphi)(v)=\varphi(Tv)$.

במקרה הכללי, נגדיר $T^*:\Lambda^k W\to\Lambda^k V$ לפי $T^*(\varphi)(v_1,\dots,v_k)=\varphi(Tv_1,\dots,Tv_k)$.

נרצה לטעון כי $T^*(\varphi\wedge\psi)=T^*(\varphi)\wedge T^*(\psi)$ לכל $\varphi\in\Lambda^k$ ו- $\psi\in\Lambda^l$. אכן,

$$T^*(\varphi\wedge\psi)(v_1,\dots,v_{k+l})=\frac{1}{k!\cdot l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\varphi(Tv_{\sigma(1)},\dots,Tv_{\sigma(k)})\cdot\psi(Tv_{\sigma(k+1)},\dots,Tv_{\sigma(k+l)})$$

$$T^*(\varphi)\wedge T^*(\psi)=\frac{1}{k!\cdot l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot T^*(\varphi)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\cdot T^*(\psi)(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

נעבור למקרה של יריעות. יהיו M ו- N יריעות, ותהי $f:M\to N$ העתקה חלקה.

אז f משרה $f^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$: בהינתן $\varphi\in\Omega^k(N)$, $f^*(\varphi)(p)=(df|_p)^*(\varphi|_{f(p)})$.

באופן אוטומטי, לכל $\varphi\in\Omega^k(N)$ ו- $\psi\in\Omega^l(N)$ מתקיים (בזכות מה שהוכחנו קודם)

$$f^*(\varphi\wedge\psi)=f^*(\varphi)\wedge f^*(\psi).$$

כלומר f^* משרה הומומורפיזם של חוגים מדורגים עם חושבים של ($f^*:\bigoplus_{k=0}^{\infty}\Lambda^k(N)\to\bigoplus_{k=0}^{\infty}\Lambda^k(M)$).

למשל, אם $\varphi\in\Omega^0(N)$ (כלומר φ פונקציה), $f^*(\varphi)=\varphi\circ f$.

$M\xrightarrow{f}N$ $\quad\varphi\in\Omega^0(N)=C^\infty(N)$

נרצה להוכיח ש- f^* היא העתקת שרשראות, כלומר $f^*(d\varphi)=d(f^*\varphi)$.

אכן, עבור פונקציות $\varphi\in\Omega^0(N)$, $d(f^*\varphi)=d(\varphi\circ f)|_p=d\varphi|_{f(p)}\circ df|_p=f^*(d\varphi)$, כפי שרצינו.

טענה:

אם $\varphi\in\Omega^k(N)$ ו- $f:M\longrightarrow N$, אזי $f^*(d\varphi)=d(f^*\varphi)$.

$$\begin{tikzcd} \Omega^{k+1}(N) \arrow[r, "f^*"] & \Omega^{k+1}(M) \\ \Omega^k(N) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "f^*"] & \Omega^k(M) \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

הערה:

איך נראה f^* בקואורדינטות? כלומר, מהו

$$?f^*(g\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})$$

$$f^*(g\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})=f^*(g)\wedge f^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge f^*(dx^{i_k})=f^*(g)\wedge d(f^*(x^{i_1}))\wedge\ldots\wedge d(f^*(x^{i_k}))=$$

$$=g\circ f\wedge df^{i_1}\wedge\ldots\wedge df^{i_k}$$

לא חייבים, נראה להבהרה

הוכחת הטענה:

כל הדברים מקומיים, ולכן מספיק לעבוד בקואורדינטות. אם $\varphi=g\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$,

$$d(f^*\varphi)=d(g\circ f)\wedge df^{i_1}\wedge\ldots\wedge df^{i_k}$$

$$f^*(d\varphi)=f^*(dg\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})=f^*(dg)\wedge f^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge f^*(dx^{i_k})=$$

$$=d(f^*g)\wedge d(f^*(x^{i_1}))\wedge\ldots\wedge d(f^*(x^{i_k}))=d(g\circ f)\wedge df^{i_1}\wedge\ldots\wedge df^{i_k}$$

$\square$

לסיכום, f^* הומומורפיזם של אלגברות מדורגות $(f^*(\varphi\wedge\psi)=f^*(\varphi)\wedge f^*(\psi))$ וגם העתקת שרשראות $(f^*(d\varphi)=d(f^*\varphi))$.

אוריינטציה

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{R}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על הבסיסים הסדורים של V:

$(v_1,\ldots,v_n)\sim(w_1,\ldots,w_n)$ אם כאשר נרשום $v_i=\sum_{j=1}^{n}a_i^j w_j$ ונקבל את מטריצת המעבר בין הבסיסים (a_i^j), הדטרמיננטה של המטריצה הזו חיובית.

ביחס הזה יש שתי מחלקות שקילות. בחירה של אחת מהמחלקות נקראת אוריינטציה.

נסתכל על $V=\mathbb{R}^n$. על כל בסיס של V אפשר לחשוב כעל מטריצה ב-$GL_n(\mathbb{R})$. יש לה שני רכיבי קשירות, ולמעשה שני בסיסים מגדירים אותה אוריינטציה אם ורק אם אפשר לעבור מאחד לשני באופן חלק.

כעת נגדיר אוריינטציה של יריעה. הרעיון: נבחר בכל נקודה אוריינטציה למרחב המשיק באותה נקודה באופן רציף (=חלק).

בהינתן בחירה של בסיס $v_1,\dots,v_n$ ב-T_pM ובהינתן סביבה U (קשירה מסילתית) של p, נניח שקיימים n שדות וקטוריים $A_1,\dots,A_n$ ב-U כך ש-$A_1(x),\dots,A_n(x)$ בסיס ב-T_xM לכל $x\in U$ וכך ש-$A_1(p),\dots,A_n(p)=v_1,\dots,v_n$ אזי בכל נקודה $x\in U$ נאמר שהאוריינטציה הנקבעת ע"י $A_1(x),\dots,A_n(x)$ ב-T_xM היא האוריינטציה התואמת לאוריינטציה הנקבעת ע"י $v_1,\dots,v_n$ ב-T_pM.

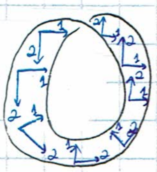
צריך להוכיח שזה מוגדר היטב. נניח ש-$w_1,\dots,w_n$ בסיס שקול ל-$v_1,\dots,v_n$, ונניח בנוסף ש-$B_1,\dots,B_n$ הרחבות חלקות של $w_1,\dots,w_n$. בנקודה p הדטרמיננטה חיובית. בכל נקודה x של U מטריצת המעבר משתנה באופן רציף, ולכן הדטרמיננטה שלה תישאר חיובית לאורך כל הדרך.

הגדרה:

תהא M יריעה. אוריינטציה (כיוון) של M היא בחירה של אוריינטציה בכל נקודה $x\in M$ באופן שלכל נקודה יש סביבה קשירה שבה הבחירה תואמת לבחירה בנקודה.

לא לכל יריעה יש כיוון. ביריעה קשירה, אם יש כיוון, אז יש בדיוק שניים.

למשל, לטבעת מביוס (פתוחה) אין כיוון.



הערה:

לכל נקודה יש סביבה שבה יש n שדות וקטוריים בלתי-תלויים בכל נקודה.

למשל, אם ניקח סביבת קואורדינטות U עם קואורדינטות $x^1,\dots,x^n$, אזי $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ הם n שדות וקטוריים בלתי-תלויים בכל נקודה.

למרות זאת, ייתכן שלא יהיו n שדות וקטוריים שלם בלתי-תלויים בכל נקודה.

אפשר להגדיר אוריינטציה גם בלשון מסילות. הרעיון: לכל שתי נקודות ולכל שתי מסילות ביניהן, אם נגרור את האוריינטציה מהראשונה לשנייה ע"י המסילות נקבל את האוריינטציות שבחרנו בכל נקודה בדרך. אפשר לדבר גם על לולאות שומרות/הופכות אוריינטציה.

אפשר לדבר על לולאה שומרת אוריינטציה ועל לולאות הופכות אוריינטציה: גוררים את האוריינטציה לאורך המסלה, ורואים מה יוצא בסוף. אם שתי לולאות הומוטופיות (ביחס לקצוות), האחת שומרת אוריינטציה אם ורק אם השנייה שומרת אוריינטציה.

אז אפשר להגדיר הומומורפיזם $\pi_1(M,a) \longrightarrow \{1,-1\}$. אם הוא טריוויאלי, היריעה אוריינטבילית.

כיוון ש-$\{1,-1\}$ אבלית, בעצם מספיק לבדוק את ההעתקה $H_1(M)\cong Ab\,\pi_1(M,a)\longrightarrow\{1,-1\}$.

טענה:

א. אם בחרנו כיוון ב-M, אז לכל נקודה יש סביבת קואורדינטות U עם קואורדינטות $x^1,\dots,x^n$ כך שהשדות הווקטוריים $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ תואמים לכיוון שבחרנו על M.

אם יש שתי סביבות כאלה $(U,(x^1,\dots,x^n))$ ו-$(V,(y^1,\dots,y^n))$ כך ש-$U\cap V$ אינו ריק, ואם φ פונקציית מעבר הקואורדינטות $(y^i=\varphi^i(x^1,\dots,x^n))$, אז $\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)>0$ לכל $x\in U\cap V$.

ב. גם הכיוון השני נכון: נניח שיש כיסוי של M על ידי סביבות קואורדינטות $\{U_\alpha\}$ כך שלכל α,β, אם φ פונקציית מעבר הקואורדינטות ב-$U_\alpha\cap U_\beta$ מ-$x^1,\dots,x^n$ ב-U_α ל-$y^1,\dots,y^n$ ב-U_β, מתקיים $\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)>0$ לכל $x\in U_\alpha\cap U_\beta$. אז אוסף השדות הווקטוריים $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ בסביבות הללו מגדיר כיוון על היריעה.

יריעות עם שפה

הגדרה:

יריעה טופולוגית עם שפה היא מרחב טופולוגי האוסדורף עם בסיס בן מנייה כך שלכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפית לכדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$ או לכדור פתוח ב-$H^n=\{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid x^n\ge 0\}$. 

במקרה החלק נדרוש שתהיה הרחבה חלקה של ההעתקה לקבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$ שמכילה את הכדור ב-H^n.

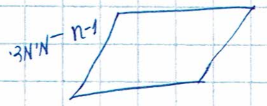
השפה של היריעה היא אוסף הנקודות שנמצאות על ה"רצפה" של כדורים פתוחים ב-H^n. זה מוגדר היטב, והשפה היא יריעה בעצמה ממימד $n-1$. בנוסף, השפה של יריעה היא יריעה בלי שפה. את השפה של M נסמן ∂M.

נראה שבעצם הטענה ש-$\partial(\partial M)=\emptyset$ דואלית לטענה ש-$d(d\psi)=0$. כך נקבל ממשפט סטוקס, שיקשר בין השפה של יריעה לבין הדיפרנציאל של תבניות דיפרנציאליות.

נרצה להוכיח את הטענה הבאה:

אם יש אוריינטציה על היריעה, יש אוריינטציה על השפה של היריעה.

V n-מימדי



אם יש מרחב וקטורי n-מימדי ותת-מרחב n-1 -מימדי, הווקטורים שלא נמצאים במרחב מתחלקים לשתי קבוצות: אלו שפונים לצד האחד ואלו שפונים לצד השני. בדומה ביריעה. ניקח נקודה על השפה. על נקודה במרחב המשיק אפשר לחשוב כמסילה, ואז נשאל האם המסילה מתחילה בנקודה או מסתיימת בה.

<u>הגדרה:</u>

בהינתן כיוון על יריעה עם שפה M, הוא משרה כיוון על השפה ∂M באופן הבא:

$(n-1)$-יה $v_1,\dots,v_{n-1}$ ב-$T_p(\partial M)$ תהיה נ"ג לכיוון ב-∂M אם $u,v_1,\dots,v_{n-1}$ היא נ"ג לכיוון ב-M עבור u שפונה החוצה. זה בדיוק המצב של תת-מרחב $n-1$-מימדי $T_p(\partial M)$ של מרחב n-מימדי T_pM.

הוא תמיד קיים מההסבר הנ"ל והם יהיו תואמים באופן מקומי, ולכן קיבלנו כיוון על ∂M.

<u>הערה:</u>

תהי f החלפת קואורדינטות, ותהי $\varphi=\sum g\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$. אזי בקואורדינטות של f, φ הינה

$$\sum (g\circ f)\, df^{i_1}\wedge\dots\wedge df^{i_k}$$

שהיא גם בדיוק הנוסחה שהייתה לנו ל-$f^*(\varphi)$.

16.1.19

יריעות חלקות וחבורות לי - הרצאה 13

נתחיל מלתאר את הסיטואציה.

תהי M יריעה n-מימדית מכוונת <u>קומפקטית</u> עם שפה (אולי ריקה). (מה שנעשה בעצם אפשר להגדיר ולהוכיח גם כשהתומך של ω קומפקטי במקום כל היריעה, אבל אנחנו נוסיף את ההנחה הזו לנוחות)

נרצה להגדיר אינטגרל של תבנית מסדר n על M.

ניקח סביבת קואורדינטות U עם קואורדינטות שתואמות לכיוון $x^1,\dots,x^n$, כלומר $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ תואמים לכיוון. נניח ש-ω תבנית מסדר n עם תומך שמוכל בסביבה

$$(a_1,b_1]\times(a_2,b_2)\times\dots\times(a_n,b_n)$$

בקואורדינטות, $\omega=g(x^1,\dots,x^n)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$. נרצה להגדיר

$$\int_M\omega=\int_{[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]} g\,dx^1\dots dx^n .$$

נבדוק האם זה מוגדר היטב. נניח שיש קואורדינטות אחרות $y^1,\dots,y^n$ ב-V ותיבה עבורם המכילה את התומך, ותהי $h:V\longrightarrow U$ פונקציית מעבר הקואורדינטות, כלומר

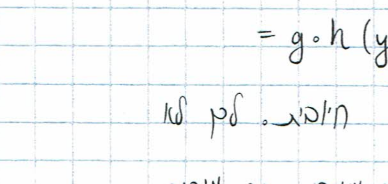
$$x^1=h^1(y^1,\dots,y^n)$$
$$\vdots$$
$$x^n=h^n(y^1,\dots,y^n).$$

בקואורדינטות $y^1,\dots,y^n$,

$$\omega=g\circ h(y^1,\dots,y^n)\,dh^1\wedge\dots\wedge dh^n=g\circ h\Big(\sum_{i=1}^n\frac{\partial h^1}{\partial y^i}dy^i\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i=1}^n\frac{\partial h^n}{\partial y^i}dy^i\Big)=$$
$$=g\circ h(y^1,\dots,y^n)\cdot\Big(\det\Big(\frac{\partial h^i}{\partial y^j}\Big)\Big)\,dy^1\wedge\dots\wedge dy^n$$

כיוון שהקואורדינטות תואמות לאוריינטציה, הדטרמיננטה של מטריצת המעבר חיובית. לכן לא צריך ערך מוחלט, וקיבלנו את הנוסחה להחלפת משתנים באינטגרל n-מימדי. זה מוכיח שהאינטגרל מוגדר היטב.

עכשיו נרצה להגדיר את האינטגרל לכל תבנית דיפרנציאלית מסדר n, בלי הגבלה על התומך.



לכל $x\in M$ יש תחום תיבה כנ"ל* U כך ש-$x\in U$. ניקח פונקציית בליטה φ_x ונגדיר $U_x=\{y\mid\varphi_x(y)>\frac12\}$.

U_x כיסוי פתוח של M, שהיא קומפקטית, לכן יש תת-כיסוי סופי $U_{x_1},\dots,U_{x_m}$ ופונקציות מתאימות $\varphi_{x_1},\dots,\varphi_{x_m}$, שנסמן בקיצור $\varphi_1,\dots,\varphi_m$.

(*- תואם לאוריינטציה ומלבני)

אז $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ חלקות ומקיימות $\varphi_1+\dots+\varphi_m > \frac{1}{2} > 0$ בכל M.

נסמן $\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1+\dots+\varphi_m}$. $\psi_1,\dots,\psi_m$ מקיימות:

א. $\psi_1,\dots,\psi_m$ חלקות ואי-שליליות.

ב. $\sum \psi_i \equiv 1$ על M.

ג. לכל i, התומך של ψ_i מוכל בתיבה בתוך סביבת קואורדינטות.

כזה נקרא **פירוק יחידה** (סופי). ביריעה לא קומפקטית אפשר להשיג פירוק יחידה סופי מקומית.

הגדרה:

תהי M יריעה n-מימדית מכוונת קומפקטית עם שפה (אולי ריקה), ותהי $\omega\in\Omega^n(M)$. נגדיר

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_M \psi_i \omega$$

יריעה מכוונת!

כל $\int_M \psi_i\omega$ מוגדר, כי יש ל-$\psi_i\omega$ תומך שמוכל במלבן קטן.

אנחנו כבר יודעים שכל מחובר מוגדר היטב (בלתי-תלוי בבחירת הקואורדינטות). צריך להראות שהסכום אינו תלוי בפירוק היחידה $\psi_1,\dots,\psi_m$.

אכן, נניח ש-$\eta_1,\dots,\eta_l$ עוד פירוק יחידה. צריך להראות שמקבלים אותו מספר. נשים לב שגם $\{\psi_i\eta_j\}_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le l}}$ פירוק יחידה, והתומכים עדיין מוכלים במלבן יפה. נראה שפירוק היחידה החדש נותן אותו מספר כמו השניים האחרים. אכן, נראה עבור הראשון:

$$\sum_{i,j}\int_M \psi_i\eta_j\omega = \sum_i\sum_j\int_M \psi_i\eta_j\omega = \sum_i\int_M\sum_j \psi_i\eta_j\omega = \sum_i\int_M \psi_i\omega$$

עבור i נתון, כל האינטגרלים מוכלים בתוך U_i, ולכן זה בעצם האינטגרל המוכר

כמבוקש.

באותו אופן, על ידי סכימה $\sum_j\sum_i\int_M \psi_i\eta_j\omega$, נקבל שהתוצאה שווה לאינטגרל שהוגדר על ידי $\eta_1,\dots,\eta_l$.

בסך הכל, האינטגרל מוגדר היטב.

תרגיל:

האינטגרל ליניארי. כלומר

$$\int_M(\omega+\tau) = \int_M\omega + \int_M\tau$$

$$\int_M a\omega = a\int_M\omega$$

אם $N\subseteq M$ תת-יריעה מכוונת k-מימדית (משוכנת, משוקעת, ...), $i:N\to M$ ההכלה,

ו-σ תבנית מסדר k על M, אזי נגדיר

$$\int_N \sigma := \int_N i^*\sigma .$$

בפרט, אפשר לקחת $N=\partial M$. אז מוגדר אינטגרל של תבניות מסדר $n-1$.

<u>משפט:</u> (משפט סטוקס)

תהי M יריעה n-מימדית מכוונת קומפקטית עם שפה (אולי ריקה), ותהי ω תבנית מסדר $n-1$ על M. אזי

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega .$$

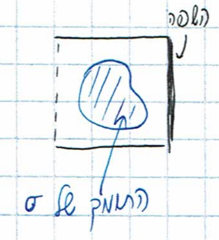
בפרט, אם $N\subseteq M$ יריעה k-מימדית מכוונת קומפקטית עם שפה (אולי ריקה), ו-ω תבנית מסדר $k-1$ על M, אזי

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega .$$

זה מראה שיש דואליות בין d ל-∂.

<u>הוכחה:</u>

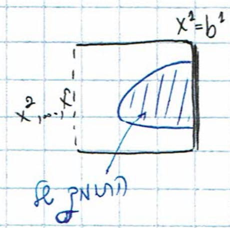
נבחר פירוק יחידה שבאמצעותו נוכל לחשב בקואורדינטות $\omega=\sum_{i=1}^{m}\psi_i\omega$, ונוכיח לכל $\psi_i\omega$ בנפרד. כלומר, נניח מלכתחילה ש-σ תבנית מסדר $n-1$ בסביבת קואורדינטות יפה בצורת תיבה. נחלק לשני מקרים.



נניח שהתומך של σ אינו נוגע בשפה, כלומר σ מתאפסת על השפה. אז אגף ימין הוא 0. עבור אגף שמאל, נכתוב $\sigma=\sum_{i=1}^{n} g_i\, dx^1\wedge\dots dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\dots\wedge dx^n$. אזי

$$d\sigma=\sum_{i=1}^{n}\left(\pm\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n\right)$$

נבצע אינטגרל לכל מחובר בנפרד. רוצים לחשב את $\int\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^1\dots dx^n$. לפי פוביני, נבצע אינטגרל קודם לפי הרכיב ה-i; אז ערך האינטגרל הוא g בקצה האחד פחות g בקצה השני. אבל g מתאפסת על הקצוות, ולכן האינטגרל כולו יוצא 0. זה מסיים את המקרה הראשון.



במקרה השני, σ אינה מתאפסת על השפה. כפי שכתבנו, נניח שהמלבן הוא $a^1<x^1\le b^1$ (השפה). כיוון ש-$\frac{\partial}{\partial x^1}$ מכוון החוצה, $\frac{\partial}{\partial x^2},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ מגדירים את האוריינטציה של השפה.

(המשך ההוכחה)

ההכלה $i:\partial M \longrightarrow M$ היא $(x^2,\dots,x^n) \longmapsto (b, x^2,\dots,x^n)$. אז

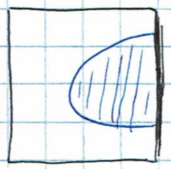
$$i^*\sigma = g_1\, dx^2\wedge\dots\wedge dx^n$$

$$d\sigma = \sum \pm \frac{\partial g_i}{\partial x^i}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

בדומה למקרה הראשון, באינטגרל $\int_M d\sigma$ תורם רק $\frac{\partial g_1}{\partial x^1}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$.

נבצע קודם אינטגרל לפי המשתנה הראשון, ובדיוק נקבל את $g_1\, dx^2 \dots dx^n$,

וזה בדיוק אגף ימין.



□

__מסקנה:__

אם M יריעה סגורה, כלומר קומפקטית בלי שפה, ו-ω תבנית מסדר $n-1$, אז

$$\int_M d\omega = 0.$$