פתרון תרגיל 3

20 במאי 2018

1. תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
   א. אם A מוכלת ממש ב־B אז $|A| < |B|$.
   ב. אם $|A| > 1$ אז $|A| < |A \times A|$.
   ג. אם $A \cap B = \varnothing$ אז $|P(A \cup B)| = |P(A) \times P(B)|$

   פתרון:

   א. לא נכון, קבוצת הזוגים מוכלת ממש בטבעיים, אך עוצמתן זהה.

   ב. לא נכון. קחו $A = \mathbb{N}$.

   ג. הוכחה: נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f : P(A \cup B) \to P(A) \times P(B)$ ע"י

   $$\forall X \subseteq A \cup B : f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

   נראה חח"ע ועל:

   חח"ע: נניח $f(X) = f(Y)$, אזי נקבל $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$, כלומר $X \cap A = Y \cap A \wedge X \cap B = Y \cap B$. נראה $X \subseteq Y$ ובאותו אופן מתקיים להיפך. יהי $x \in X$. אם $x \in A$ אז $x \in X \cap A = Y \cap A$ ולכן $x \in Y$. אחרת, כיון ש־$X \subseteq A \cup B$ נקבל $x \in B$ ולכן $x \in X \cap B = Y \cap B$ ולכן $x \in Y$.

   על: יהי $(X, Y) \in P(A) \times P(B)$. כיון שנתון $A \cap B = \phi$ ו־ $Y \subseteq B$ לכן $A \cap Y = \phi$, ולכן נקבל ש־ $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A) = X \cup \phi = X$, ובאותו אופן $(X \cup Y) \cap B = Y$, ולכן $X \cup Y$ הוא המקור. כלומר, $f(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) = (X, Y)$.

2. יהי $x \in \mathbb{R}$. נגדיר $A_x = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| \in \mathbb{Z}\}$. חשבו את $|A_x|$.

   פתרון:

   נראה שזה מעוצמה $\aleph_0$ ע"י פונקציה הפיכה לשלמים: $f : A_x \to \mathbb{Z}$ ע"י $f(y) = x - y$. חח"ע: שימו לב ש־x קבוע וה־y משתנה. לכן אם $y \neq y'$ אז כמובן $f(y) = x - y \neq x - y' = f(y')$. על: לכל $a \in \mathbb{Z}$ המקור שלו הוא $x - a$ כי נקבל $f(x - a) = x - (x - a) = a$.

3. השלמים של גאוס מוגדרים להיות: $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi : a,b\in\mathbb{Z}, i^2=-1\}$. חשבו את $|\mathbb{Z}[i]|$.

פתרון:

נראה שזה מעוצמה $\aleph_0$ ע"י מציאת פונקציה הפיכה ל־$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $f:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ע"י $f(a+bi)=(a,b)$. הפיכה ע"י מציאת ההופכית $f^{-1}((a,b))=a+bi$. וכמובן $f(f^{-1}((a,b))=f(a+bi)=(a,b), f^{-1}(f(a+bi))=f^{-1}((a,b))=a+bi$.

4. הוכיחו: $|[0,\infty)|=\aleph$ כאשר $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R} : 0\le x\}$.

פתרון:

זהו תרגיל קש"ב: כיון ש $[0,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ נקבל $|[0,\infty)|\le\aleph$. כמו כן ראיתם ש $|[0,1]|=\aleph$, ושוב כיון ש $[0,1]\subseteq[0,\infty)$ נקבל $|[0,\infty)|\ge\aleph$. ע"פ קש"ב נקבל את הדרוש.

5. מצאו את עוצמת הקבוצות הבאות:

א. קבוצת כל הקטעים במישור $\mathbb{R}^2$ המאונכים לציר ה־x. (קטע הוא הקו הישר המחבר בין שתי נקודות שונות).

ב. קבוצת כל הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01.

פתרון:

א. נשים לב שקבוצה זו היא הקבוצה הבאה (נסמנה ב־A):

$$A=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|x_1=x_2\wedge y_1\neq y_2\}$$

ולכן, נקבל

$$|A|\le\aleph^4=\aleph$$

בנוסף, נשים לב שיש $B\subseteq A$ (תת קבוצה של קטעים) מעוצמה $\aleph$: והיא:

$$B=\{((0,0),(0,y))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|y\neq 0\}$$

קל לראות ש־$|B|=\aleph$, כי נשלח כל ישר מ־B ל־y, וזו פונקציה חח"ע ועל ל־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$. לכן נקבל:

$$|A|\ge|B|=\aleph$$

לפי ק.ש.ב. נקבל

$$|A|=\aleph$$

ב. נסמן את הקבוצה ב־A. נשים לב שאם יש 0 בסדרה, אז אחריו באים רק אפסים. נגדיר פונקציה $f : A \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ע"י:

$$f(a_n) = \begin{cases} 0 & \forall n : a_n = 1 \\ k & a_k = 0 \wedge \forall n < k : a_n = 1 \end{cases}$$

במילים: את הסדרה שהיא רק אחדות נשלח לאפס, וכל סדרה אחרת נשלח למקום הראשון שבו מופיע אפס (למשל, הסדרה של רק אפסים נשלחת ל־1, הסדרה של אחד ואז אפסים ל־2 וכך הלאה). נראה חח"ע ועל:

חח"ע: נניח $f(a_n) = f(b_n)$. אם $f(a_n) = f(b_n) = 0$ אז שתיהן סדרות רק של אחדות ולכן שוות. אחרת נסמן $f(a_n) = f(b_n) = k \in \mathbb{N}$, אזי נקבל, לפי הגדרת הפונקציה, ש:

$$\forall n < k : a_n = b_n = 1$$

$$\wedge$$

$$a_k = b_k = 0$$

ובנוסף, כיון שאחרי אפס אסור שיופיע 1 נקבל

$$\forall n > k : a_n = b_n = 0$$

ולכן הסדרות שוות כלומר, $a_n = b_n$.

על: יהי $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. אם $k = 0$ אז הסדרה שכולה אחדות היא המקור. אם $k \in \mathbb{N}$ אז המקור הוא הסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$