תרגיל בית 3 ־אנליזה למורים

25 בנובמבר 2016

שאלה 1

חשבו את גבול הסדרה הבאה: $a_n = \frac{1}{n}\left(\left(8+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(8+\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(8+\frac{n}{n}\right)^2\right)$

הדרכה: נפתח את כל הסוגריים הפנימים כדי לקבל :

$a_n = \frac{1}{n}\cdot\left(8^2\cdot(n-1) + 2\cdot 8\cdot\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right) + \left(\frac{1^2}{n^2}+\ldots+\frac{n^2}{n^2}\right)\right)$

נזכר בזהויות הבאות

$$1+2+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

ונשתמש בהן על מנת לפשט את הביטוי.

פתרון: לאחר פישוט נקבל $a_n = \frac{1}{n}\left(8^2\,(n-1) + 2\cdot 8\cdot\frac{n(n+1)}{2n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) = \frac{64(n-1)}{n} + \frac{8(n+1)}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

א) $\frac{64(n-1)}{n} \to 64$

ב) $\frac{8(n+1)}{n} \to 8$

ג) $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$

ולכן $lim_{n\to\infty} a_n = \frac{217}{3}$

שאלה 2

תהי a_n סדרה, המתכנסת לגבול ממשי $L \in \mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאיננה מתכנסת.

הוכיחו $c_n = a_n \cdot b_n$ מתכנסת אם ורק אם $L = 0$.

הדרכה: כדי להוכיח כיוון $\Rightarrow$ נשתמש במשפט מההרצאה האומר שהגבול של סדרה חסומה כפול סדרה אפסה שווה אפס.

עכשיו רוצים להוכיח כיוון $\Leftarrow$. כלומר נניח ש־c_n מתכנסת ונוכיח שבהכרח $L = 0$. נניח בשלילה ש־$L \neq 0$ אנו יודעים כי $b_n = \frac{c_n}{a_n}$. הביטוי הזה מוגדר החל ממקום מסויים בסדרה (למה?).

מצד שני לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל: $lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n} = ?$, מה שגורר ש־$b_n$ מתכנסת בסתירה לנתון.

פתרון: במקום סימן שאלה אדום צריך להיות $\frac{M}{L}$ כאשר $lim_{n\to\infty}c_n = M$.

שאלה 3

תהיינה שתי סדרות a_n, b_n כך ש־$lim_{n\to\infty}a_n = \infty$ ו־$a_n + b_n$ סדרה חסומה. מצא $lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

הדרכה: נזכר שאם $a_n \to \infty$ אז $\frac{1}{a_n} \to 0$, ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n} = ?$.

מאריתמטיקה של גבולות מקבלים:

$$lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n+a_n}{a_n} - \frac{a_n}{a_n}\right) = ?\text{, ולכן } lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = ?.$$

פתרון: במקום סימן שאלה 1 צריך להיות אפס, במקום סימן שאלה שני צריך להיות 1־ ולכן במקום סימן שאלה שלישי גם צריך להיות 1־.

שאלה 4

חשבו את גבול הסדרה: $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$.

הדרכה: לפי המשפט, אם סדרה של מספרים חיוביים a_n מקיימת $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אזי $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$. המקרה שלנו, נבחר $a_n = n!$.

פתרון: $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = lim\frac{(n+1)!}{n!} = lim(n+1) = \infty$, ולכן לפי המשפט גם הגבול של הסדרה שלנו הוא ∞.

שאלה 5

בעזרת המשפט מתרגיל הקודם, חשבו את הגבול $b_n = \sqrt[n]{\frac{(6n)!}{(n!)^6}}$.

רמז: במקרה שלנו $a_n = \frac{(6n)!}{(n!)^6}$.

פתרון: $lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(6(n+1))!}{((n+1)!)^6}\right)}{\left(\frac{(6n)!}{(n!)^6}\right)} = \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^6 \cdot \frac{(6(n+1))!}{(6n)!} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^6 \cdot (6n+1) \cdot (6n+2) \cdot \ldots \cdot (6n+6) = 6^6$

שאלה 6

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{3-8n^3}=0$

2) $lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}=\frac{1}{3}$

3) $lim_{n\to\infty}\frac{-5n-1}{9n^3-2}=0$

4) $lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n+1}=\frac{1}{5}$

5) $lim_{n\to}\frac{9n^3-2}{n+1}=\infty$