פתרון תרגיל בית 5, גאומטריה אוקלידית ואנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

לכסון אורתוגונלי

1. נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ -2 & 4 & 3\\ 6 & 3 & -4\end{pmatrix}$

א. מצאו את הערכים עצמיים של A והריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ המורכב כולו מו"ע של המטריצה A.

פתרון

א.

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 6\\ -2 & 4-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=}\begin{vmatrix}5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda\\ -2 & 4-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 4-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3-6R_1\to R_3}{\overset{R_2+2R_1\to R_2}{=}}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 6-\lambda & 5\\ 0 & -3 & -10-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6-\lambda & 5\\ -3 & -10-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\left[-(6-\lambda)(10+\lambda)-(-3)\cdot 5\right]$$

$$=(5-\lambda)\left(-60-6\lambda+10\lambda+\lambda^2+15\right)=(5-\lambda)\left(\lambda^2+4\lambda-45\right)=(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+9)=-(\lambda-5)^2(\lambda+9)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=5\,,\ \lambda_3=-9$$

קיבלנו $\lambda_1=\lambda_2=5$ ערך עצמי בעל ריבוי אלגברי 2 ו- $\lambda_3=-9$ ערך עצמי ללא ריבוי (בעל ריבוי אלגברי 1).

כעת נחשב וקטורים עצמים:

<u>עבור</u> $\lambda_1=\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 6\\ -2 & -1 & 3\\ 6 & 3 & -9\end{pmatrix}\underset{R_3+3R_2\to R_3}{\overset{R_1-2R_2\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ -2x-y+3z=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z$$

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\,,\ z=s\,,\ t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע"ע $\lambda_1=\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}s\\ t\\ s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=2\,,\ s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $s=2$, $t=0$ ונקבל מיד $y=-3$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$.

בסה"כ הריבוי הגיאומטרי של הע"ע הכפול $\lambda_1=\lambda_2=5$ הוא 2.

<u>עבור</u> $\lambda_3=-9$:

$$\begin{pmatrix}10&-2&6\\-2&13&3\\6&3&5\end{pmatrix}\underset{R_3+3R_2\to R_3}{\overset{R_1+5R_2\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0&63&21\\-2&13&3\\0&42&14\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{14}R_3\to R_3}{\overset{\frac{1}{21}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0&3&1\\-2&13&3\\0&3&1\end{pmatrix}\underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0&3&1\\-2&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$3y+z=0\Rightarrow z=-3y\ ,\ -2x+4y=0\Rightarrow x=2y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל $x=2$, $z=-3$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$. כאן ריבוי גיאומטרי 1.

בסה"כ המטריצה לכסינה (כצפוי, היא סימטרית!).

ב.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע"ע עם ריבוי אלגברי 2 : $\lambda_1=\lambda_2=5$.

$$w_1=v_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+2^2+0^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{3}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{6}{5}\\2\end{pmatrix}$$

ננרמל את הוקטורים : $u_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$.

$\|w_2\|=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{56}{5}}$ ומכאן : $u_2=\sqrt{\frac{5}{56}}\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{6}{5}\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\\frac{6}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\2\sqrt{\frac{5}{56}}\end{pmatrix}$

הו"ע השלישי אורתוגונלי מראש לשניים האלו, מכיוון שהו"ע שהתקבלו מע"ע שונים הם אורתוגונלים לפי משפט.

נורמל גם אותו: $v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

הנורמה היא: $\|v_3\|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$ ומכאן הווקטור המנורמל: $u_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{14}}\\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$.

מכאן $\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\ \frac{6}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\ 2\sqrt{\frac{5}{56}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}\\ \frac{1}{\sqrt{14}}\\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי מבוקש.

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש-$P^tAP=D$:

א. $A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$ ב. $A=\begin{pmatrix}-5&1&1\\1&-5&1\\1&1&-5\end{pmatrix}$ ג. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ד. $A=\begin{pmatrix}-4&1&1\\1&-4&1\\1&1&-4\end{pmatrix}$

ו. $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$

<u>פתרון</u>

א. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$f_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}11-\lambda&2&-8\\2&2-\lambda&10\\-8&10&5-\lambda\end{vmatrix}=(11-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2-\lambda&10\\10&5-\lambda\end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-8\\10&5-\lambda\end{vmatrix}-8(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-8\\2-\lambda&10\end{vmatrix}=$$

$$=(11-\lambda)\left[(2-\lambda)(5-\lambda)-100\right]-2(10-2\lambda+80)-8(20+16-8\lambda)=$$

$$(11-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-90)-180+4\lambda-288+64\lambda=-\left(\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+\underbrace{1458}_{18\cdot 81}\right)=0$$

מכאן נקבל:

$$\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+\underbrace{1458}_{18\cdot 81}=\left(\lambda^3-81\lambda\right)-\left(18\lambda^2-18\cdot 81\right)=\lambda\left(\lambda^2-81\right)-18\left(\lambda^2-81\right)$$

$$=\left(\lambda^2-81\right)\left(\lambda-18\right)=\left(\lambda-9\right)\left(\lambda+9\right)\left(\lambda-18\right)=0\Rightarrow\lambda_1=9\,,\,\lambda_2=-9\,,\,\lambda_3=18$$

ערכים עצמים שונים, לכן נקבל מכאן 3 ו"ע בת"ל. לפי משפט, מכיוון שהמטריצה סימטרית, הווקטורים העצמים הללו יהיו אורתוגונלים.

נפתור את המערכת $\left(A-\lambda I\right)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix}2&2&-8\\2&-7&10\\-8&10&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+4R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}2&2&-8\\0&-9&18\\0&18&-36\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+2R_2\to R_3]{\frac{1}{2}R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&-9&18\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix}x-2z=0\Rightarrow x=2z\\ y-2z=0\Rightarrow y=2z\end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=2$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ ולכן ו"ע מנורמל: $u_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-9$:

$$\begin{pmatrix}20&2&-8\\2&11&10\\-8&10&14\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+4R_2\to R_3]{R_1-10R_2\to R_1}\begin{pmatrix}0&-108&-108\\2&11&10\\0&54&54\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}2&11&10\\0&-108&-108\\0&54&54\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2}\begin{pmatrix}2&11&10\\0&0&0\\0&54&54\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{54}R_3\to R_3]{\frac{1}{2}R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{11}{2}&5\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-\frac{11}{2}R_3\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix}x-\frac{1}{2}z=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}z\\ y+z=0\Rightarrow y=-z\end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=\frac{1}{2}\,,\,y=-1$. נקבל ווקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$.

נרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{3}{2}$ ולכן ו״ע מנורמל: $u_2=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=18$:

$$\begin{pmatrix}-7&2&-8\\2&-16&10\\-8&10&-13\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+4R_2\to R_3}\begin{pmatrix}-7&2&-8\\2&-16&10\\0&-54&27\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{54}R_3\to R_3]{\frac{1}{2}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}-7&2&-8\\1&-8&5\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+7R_2\to R_1}\begin{pmatrix}0&-54&27\\1&-8&5\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+8R_3\to R_2]{R_1+54R_3\to R_1}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix}y-\frac{1}{2}z=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}z\\x+z=0\Rightarrow x=-z\end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$. נקבל ווקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

נרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2}=\frac{3}{2}$ ולכן ו״ע מנורמל: $\frac{2}{3}\left(-1,\frac{1}{2},1\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

לפי משפט הו״ע המנורמלים מהווים בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ ומכאן מטריצה $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

היא המלכסנת האורתוגונלית, המטריצה האלכסונית הדומה היא $D=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&-9&0\\0&0&18\end{pmatrix}$ ומתקיים:

$P^tAP=D$.

ב. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix}-5&1&1\\1&-5&1\\1&1&-5\end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-5-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -5-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -5-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=}\begin{vmatrix}-3-\lambda & -3-\lambda & -3-\lambda\\ 1 & -5-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -5-\lambda\end{vmatrix}=-(3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -5-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}-(3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -6-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -5-\lambda\end{vmatrix}=-(3+\lambda)\cdot\left[-(6+\lambda)\right](-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3+\lambda)(6+\lambda)(-5-\lambda-1)=-(3+\lambda)(6+\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda_1=-3\,,\,\lambda_2=\lambda_3=-6$$

נמצא ו״ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=-3$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1+2R_3\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{R_1+R_2\to R_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix}x-z=0\Rightarrow x=z\\ y-z=0\Rightarrow y=z\end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

נורמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ ולכן ו״ע מנורמל: $u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=\lambda_3=-6$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x+y+z=0\Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\,,\,z=s\,,\,t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע״ע $\lambda_2=\lambda_3=-6$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-s\\t\\s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=0\,,\,s=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $t=1\,,\,s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע״ע עם ריבוי אלגברי 2 : $\lambda_2=\lambda_3=-6$.

$$w_2=v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נורמל את הוקטורים : $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

$\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ומכאן : $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $u_i\ ,\ i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו״ע של מטריצה A.

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא :

$D=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-6&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$.

<u>הערה :</u> אפשר לכפול את w_3 ב-2 בכדי ״להפטר מהשברים״ ולאחר מכן לנרמל. מגיעים בדיוק לאותה תשובה.

ג. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים :

נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=}\begin{vmatrix}4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\cdot(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda-1)=(4-\lambda)(1-\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda_1=4\,,\,\lambda_2=\lambda_3=1$$

נמצא ו"ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=4$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1+2R_3\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{R_1+R_2\to R_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix}x-z=0\Rightarrow x=z\\ y-z=0\Rightarrow y=z\end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

נורמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ ולכן ו"ע מנורמל: $u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x+y+z=0\Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\,,\,z=s\,,\,t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע"ע $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-s\\t\\s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=0\,,\,s=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $t=1\,,\,s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע"ע עם ריבוי אלגברי 2: $\lambda_2=\lambda_3=1$.

$$w_2=v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נרמל את הוקטורים: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

ומכאן $\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$: $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $u_i\,,\,i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A .

הווקטורים $u_i\,,\,i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A .

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא:

$D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

ד. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t = A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I| = 0$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & -2-\lambda \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=} -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\cdot\left[-(5+\lambda)\right](-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)(5+\lambda)(-4-\lambda-1) = -(2+\lambda)(5+\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -5$$

נמצא ו״ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1+2R_3\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_1+R_2\to R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix} x-z=0 \Rightarrow x=z \\ y-z=0 \Rightarrow y=z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ ולכן ו״ע מנורמל: $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\,,\ z=s\,,\ t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע״ע $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=0\,,\, s=1$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $t=1\,,\, s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי : $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע״ע עם ריבוי אלגברי 2 : $\lambda_2=\lambda_3=-5$.

$$w_2=v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ננרמל את הוקטורים : $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

ומכאן $\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$: $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $u_i\,,\, i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו״ע של מטריצה A .

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא :

$D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -5 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

ו. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t = A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים :

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס : $|A-\lambda I| = 0$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=} (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\cdot(3-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\cdot(3-\lambda)(4-\lambda-1) = (6-\lambda)\cdot(3-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6 \,,\, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

נמצא ו״ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1+2R_3\to R_1}{\to}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_1+R_2\to R_1}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_3-R_2\to R_3}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים : $\begin{matrix} x-z=0 \Rightarrow x=z \\ y-z=0 \Rightarrow y=z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל וקטור עצמי : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל אותו : $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ ולכן ו״ע מנורמל : $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\to}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים : $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t \,,\, z=s \,,\, t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע״ע $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $s=1$, $t=0$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $s=0$, $t=1$ ונקבל מיד וקטור עצמי : $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע"ע עם ריבוי אלגברי 2 : $\lambda_2=\lambda_3=3$.

$$w_2=v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ננרמל את הוקטורים : $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

ומכאן $\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$: $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $i=1,2,3$, u_i הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A .

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא :

$D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

3. עבור כל אחת מהמטריצות בשאלה 2 סעיפים א׳-ו׳, ציינו האם המטריצה חיובית לחלוטין. במידה ולא, הסבירו מדוע.

<u>פתרון</u>

המטריצות החיוביות לחלוטין הן בסעיפים ג׳ ו׳ בלבד, מכיוון שכל הע״ע הם חיוביים ממש. כל שאר המטריצות בעלות ערך עצמי שלילי אחד לפחות.