בס"ד אלול התשע"ו

<u>אוניברסיטת בראילן – המחלקה למתמטיקה</u>

<u>גיאומטריה אוקלידית ואנליטית 88614</u>

<u>בחינה לדוגמה</u>

<u>אורך הבחינה – 3 שעות חומר עזר – מחשבון מדעי פשוט</u>

יש לכתוב על השאלון בלבד!

בבחינה 4 שאלות. יש לעשות את כולן!

<u>בסוף השאלון מופיעים משפטים,אקסיומות הילברט נוסחאות וכו'.</u>

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
סה"כ	

1. שאלה בגיאומטריה תיכונית מתוך המאגר. (אני לא כותבת כי קשה לי להכניס ציור כרגע...) (20)

המשך תשובה

2. הוכיחו בעזרת האקסיומות של אוקלידס – ללא אכסיומת המקבילים וללא חפיפה כי במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות (משפט 6 של אוקלידס). ניתן להשתמש במשפטים של אוקלידס הקודמים לו (20)

3. מהי הצורה הגיאומטרית שמגדירה התבנית $2x^2+2y^2+2xy+2x+2y=2$ בהינתן שהע"ע הם $\lambda=1,3$. והו"ע של $\lambda=1$ הוא $v=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. האם הצורה מסובבת / משוקפת? (30)

המשך תשובה

4. הוכיחו כי כל מטריצה סימטרית $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ היא לכסינה. (30)

המשך תשובה

המשך תשובה

המשך תשובה

נספח מספר 1- המשפטים הניתנים להוכחה ללא אקסיומת המקבילים[198]

משפט 1- בהינתן קטע סופי, ניתן לבנות משולש שווה צלעות.[199]

משפט 2- מנקודה נתונה (כקצה) ניתן לשרטט קטע השווה לקטע נתון[200].

משפט 3- בהינתן שני ישרים אשר אינם שווים באורכם, ניתן לחתוך מהישר הגדול ישר השווה באורכו לישר הקטן.[201]

משפט 4- אם שני משולשים שווים בשתי צלעות בהתאמה ובזווית הכלואה ביניהם, אז גם הבסיס שלהם יהיה שווה, שטחי המשולשים יהיו שווים אחד לשני, ושתי הזוויות הנותרות יהיו שוות בהתאמה.[202] [203]

משפט 5- במשולש שווה שוקיים הזוויות ליד הבסיס שוות זו לזו.

משפט 6- אם במשולש שתי זוויות שוות זו לזו, אז הצלעות שמול אותן זוויות יהיו שוות זו לזו.

משפט 7- אם שני ישרים המשורטטים בקצוות קטע נתון נפגשים בנקודה, לא ניתן לבנות שני ישרים אחרים השווים בהתאמה לישרים הקודמים, בקצוות אותו קטע נתון בהתאמה, ומאותו צד שלו ,כך שהם יפגשו בנקודה אחרת.

משפט 8- אם שלוש הצלעות של משולש אחד שוות בהתאמה לשלוש הצלעות של משולש שני, אז המשולשים חופפים.[204]

משפט 9- ניתן לחצות זווית נתונה[205].

משפט 10- ניתן לחצות ישר סופי נתון.

משפט 11- ניתן לשרטט מנקודה נתונה על ישר נתון, קו ישר היוצר זווית ישרה עם הישר הנתון[206].

משפט 12- בהינתן ישר אינסופי ונקודה שאיננה על הישר, ניתן להוריד אנך מהנקודה לישר.

משפט 13- קו ישר ההותך ישר אחר יוצר עמו או שתי זוויות ישרות או שתי זוויות אשר סכומן שווה לשתי זוויות ישרות.

משפט 14- לכל ישר נתון, אם שני ישרים משני צידי הישר ההותכים את הישר באותה נקודה יוצרים זוויות סמוכות אשר סכומן שווה לשתי זוויות ישרות, אז שני הישרים מונחים על ישר אחד.

משפט 15- אם שני ישרים חותכים זה את זה, הם יוצרים שתי זוויות נגדיות (קדקודיות) שוות.

משפט 16- בכל משולש אם נמשיך את אחת הצלעות, הזווית החיצונית המתקבלת גדולה מכל אחת מהזוויות הפנימיות אשר אינן צמודות לה.[207]

משפט 17- בכל משולש, סכום שתי זוויות כלשהן הוא פחות משתי זוויות ישרות.

משפט 18- בכל משולש, הצלע הגדולה נמצאת מול הזווית הגדולה.

משפט 19- בכל משולש, הזווית הגדולה נמצאת מול הצלע הגדולה.

משפט 20- בכל משולש, סכום שתי צלעות גדול מהצלע השלישית.

משפט 21- אם נבנה משני קצוות צלע נתונה של משולש שני ישרים הנחתכים בתוך המשולש, אזי שני הישרים האלו יהיו קטנים משתי הצלעות האחרות של המשולש, והם יכלאו ביניהם זווית גדולות יותר.

משפט 22- משלושה ישרים (סופיים) השווים באורכם לשלושה ישרים נתונים, ניתן לבנות משולש, אם כל שני ישרים שנבחר, סכומם יהיה גדול מהישר השלישי.

משפט 23- מנקודה נתונה על ישר נתון, ניתן לבנות זוית השווה לזווית נתונה[208].

משפט 24- אם שני משולשים שווים בשתי צלעות בהתאמה, אך הזווית הכלואה ביניהם גדולה יותר במשולש אחד, אזי גם הצלע השלישית תהיה גדולה יותר באותו משולש.

משפט 25- אם שני משולשים שווים בשתי צלעות בהתאמה, אך הצלע השלישית גדולה יותר במשולש אחד, אזי גם הזווית הכלואה בין שני הישרים השווים גדולה יותר באותו משולש.

אקסיומות "נמצאת על"

I-1. לכל שתי נקודות A, B שונות קיים ישר אחד ויחיד $\overleftrightarrow{AB}$ כך ש- A, B נמצאות על $\overleftrightarrow{AB}$.

I-2. על כל ישר יש לפחות שתי נקודות שונות.

I-3. יש 3 נקודות שאינם כולם על ישר אחד.

אקסיומות ביניות

B1 אם C * B * A, אז A, B, ו-C הן שלוש נקודות שונות על ישר אחד, ו- A * B * C.

B2 נתונות שתי נקודות שונות B ו- D, קיימות נקודות A, C, ו-E על הישר BD כך ש- A * B * D, B * C * D ו- B * D * E.

B3 אם A, B, ו- C שלוש נקודות על אותו ישר, אז אחת ורק אחת מהנקודות בין שתי הנקודות האחרות.

B4 לכל ישר m ולכל שלוש נקודות A, B, ו-C לא על m :

1. אם A ו- B על אותו צד של m, ו- B ו-C על אותו צד של m , אז A ו- C על אותו צד של m.
2. אם A ו-B על צדדים שונים של m , ו-B ו- C על צדדים שונים של m , אז A ו- C על אותו צד של m .

אקסיומות חפיפות קטעים

אקסיומות חפיפות:

C1 אם A ו-B נקודות שונות ואם A' נקודה, אז לכל קרן r היוצא מ A', קיימת נקודה יחידה B', על r כך ש- A' שונה מ B' ו- $A'B' \equiv AB$

C2 אם $AB \equiv CD$ וגם $AB \equiv EF$.
אז $CD \equiv EF$. כל קטע צמוד לעצמו.

C3 אם $A * B * C$ ו-$A' * B' * C'$ וגם $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ אז $AC \equiv A'C'$.

אקסיומות החפיפות – זוויות

אקסיומות החפיפות – המשך

C4 נתונה זווית $<BAC$ ונתונה קרן $A'B'$ היוצאת מ-A', ונתון צד אחד של $A'B'$, אז יש קרן יחיד $A'C'$ על הצד הנתון כך ש $<BAC \equiv <B'A'C'$.

C5 אם $<B \equiv <A$ וגם $<C \equiv <A$, אז $<C \equiv <B$. כל זווית חפיפה לעצמה.

C6 SAS אם שתי צלעות של משולש והזווית ביניהם חפיפות בהתאמה לשתי צלעות וזווית של משולש אחר, אז שני המשולשים חופפים, ז"א, הצלעות וזוויות חופפים בהתאמה.

הגדרה: $<EFG < <ABC$ אם קיים קרן EH בין EG ל EF כך ש $<EFH \equiv <ABC$.

אקסיומת ארכמדס: יהיו $\overline{AB}$ ו-$\overline{CD}$ קטעים. אזי יש מספר $n>0\in\mathbb{N}$ מינימאלי כך שאם מחברים n קטעים חופפים ל $\overline{CD}$ על הקרן $\overrightarrow{AB}$ נקבל קטע $\overline{AE}\equiv n\overline{CD}$ כך שאו $E=B$ או $A*B*E$.

אקסיומת דדקינד: אם קבוצת כל הנקודות שנמצאת על ישר l היא איחוד של שתי קבוצות לא ריקות Σ_1 ו-Σ_2 כך שאף נקודה באחת הקבוצות איננה בין שתי נקודות של הקבוצה השנייה, אזי יש נקודה יחידה O שנמצאת על l כך שלכל נקודה A שנמצאת על Σ_1 ולכל נקודה B שנמצאת על Σ_1 מתקיים $A*O*B$.

הגדרה: יהי C מעגל עם מרכז O ורדיוס $\overline{OP}$. נקודה A היא בפנים C אם $\overline{OA}<\overline{OP}$, ובחוץ C אם $\overline{OA}>\overline{OP}$.

עיקרון מעגל-מעגל: יהיו C מעגל ו-l ישר. אם יש ל-l נקודה בפנים C ונקודה בחוץ C אזי $A\neq B, C\cap l=\{A,B\}$.

משפט המידות: יש דרך להתאים מידה $(\measuredangle A)^\circ$ לכל זווית $\measuredangle A$ כך ש:

1) $0<(\measuredangle A)^\circ<180^\circ$.
2) $(\measuredangle A)^\circ=90^\circ$ אם ורק אם $\measuredangle A$ היא זווית ישרה.
3) $(\measuredangle A)^\circ=(\measuredangle B)^\circ$ אם"ם $\measuredangle A\equiv\measuredangle B$.
4) אם קרן $\overrightarrow{AC}$ היוצאת מ-A היא בין $\overrightarrow{AB}$ ל- $\overrightarrow{AD}$ אזי $(\measuredangle CAB)^\circ+(\measuredangle DAC)^\circ=(\measuredangle DAB)^\circ$.
5) לכל מספר ממשי x בין 0 ל 180, קיימת זווית $\measuredangle A$ עם $(\measuredangle A)^\circ=x$.
6) $(\measuredangle A)^\circ>(\measuredangle B)^\circ$ אם"ם $\measuredangle A>\measuredangle B$.

נתון קטע $\overline{OI}$ הנקרא קטע היחידה, יש דרך יחידה להתאים מידה $|\overline{AB}|$ לכל קטע $\overline{AB}$ כך ש:

7) $|\overline{AB}|$ הוא מספר ממשי חיובי ו $|\overline{OI}|=1$.
8) $|\overline{AB}|=|\overline{CD}|$ אם"ם $\overline{AB}\equiv\overline{CD}$
9) $A*B*C$ אם"ם $|AC|=|AB|+|BC|$.
10) $|AB|>|CD|$ אם"ם $AB>CD$.
11) לכל מספר ממשי חיובי קיים x קטע עם מידה x.

<u>גיאומטריה אנליטית :</u>

<u>תהליך גרם שמידט:</u>

בהינתן $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס כלשהו, הבסיס $B=\{w_1,w_2\}$ המוגדר להלן יהיה בסיס אורתוגונאלי : $\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \end{cases}$ (ע"מ להגיע לבסיס אורתונורמאלי יש לנרמל)

<u>מטריצות אורתוגונאליות ב $\mathbb{R}^2$:</u>

סיבוב :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

שיקוף :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$