שם הקורס: טופולוגיה

שם המרצה: פרופ' מגרל

מתרגלים: מני וסולי

תרגיל בית מספר 4

שאלה 1

הוכח או הפרך שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה:

א. $X=[0,\infty) \quad \tau=\{\varnothing, X, (a,\infty):\ \ a\geq 0\}$

ב. $X=\mathbb{N} \quad \tau=\{\varnothing, X, A:$ תת קבוצה אינסופית ב $\mathbb{N}$ $A\}$

שאלה 2

תהי X קבוצה, נגדיר $\tau_{co-\aleph_0}=\left\{O\subseteq X:\left|O^C\right|\leq\aleph_0 \ \vee\ O=\varnothing\right\}$.

א. הוכיחו ש-$\left(X,\tau_{co-\aleph_0}\right)$ הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $\left|X\right|\leq\aleph_0$. הוכיחו כי $\tau_{co-\aleph_0}=\tau_{disc}$

ג. האם בתנאי סעיף ב' $\left(X,\tau_{co-\aleph_0}\right)$ מטריזבילי?

שאלה 3

נסמן ב $\Re_l$ את המספריים הממשיים עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau\subset T$ (הכלה <u>אמיתית</u>!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

<u>שאלה 4</u>

תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה). הראו ש (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

<u>שאלה 5:</u>

אפיינו את הסדרות המתכנסות ב מ"ט טריוויאלי.

<u>שאלת בונוס:</u>

הגדרנו בכיתה את l_∞ כמרחב הסדרות הממשיות החסומות עם נורמת הסופרמום. תהי d_∞ המטריקה המושרית מנורמה זו. תהי c_0 תת קבוצה של l_∞ המורכבת מכל הסדרות המתכנסות ל $0 \in l_\infty$.

הוכיחו כי c_0 תת קבוצה סגורה של l_∞.

בהצלחה!