תרגול 4 – אנליזה מודרנית

1. הגדרנו בהרצאה כי אם (X,S) הינו מרחב מדיד אז $f:X\to\mathbb{R}^*$ הינה מדידה אם מתקיים:

לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad \{x\in X: f(x)\le\alpha\}\in S$

שאלה: האם הפונקציה הבאה הינה מדידה בורל?

$$T(x)=\begin{cases}\sin 2x & x>0\\ 1+\cos x & x\le 0\end{cases}$$

פתרון: נגדיר את הפונקציות

$f(x)=I_{(0,\infty)}(x)$ ואת $h(x)=I_{(-\infty,0]}(x)$. אלו פונקציות מדידות שכן הקטעים $(0,\infty)$ $(-\infty,0]$ הינם מדידים בורל. ראינו בהרצאה כי מכפלה וחיבור של פונקציות מדידות הינה מדידה ולכן נקבל

$$T(x)=(\sin 2x)I_{(0,\infty)}(x)+(1+\cos x)I_{(-\infty,0]}(x)$$

הינה מדידה בורל.

2. תרגיל: תהי f פונקציה בעלת תחום מדיד D. הראו כי f מדידה אמ"מ הפונקציה g המוגדרת על $\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=g(x)$ לכל $x\in D$ ו $g(x)=0$ עבור $x\notin D$ מדידה.

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי f מדידה. אם $\alpha\ge 0$, אזי $\{x:g(x)>\alpha\}=\{x:f(x)>\alpha\}$ וזו קבוצה מדידה. אם $\alpha<0$, אזי $\{x:g(x)>\alpha\}=\{x:f(x)>\alpha\}\bigcup D^c$ שגם היא מדידה. לכן g מדידה.

$\Rightarrow$: נניח g מדידה. אזי $f=g|_D$ ומכיוון ש D מדידה אז f מדידה.

3. הראו כי הגדרה שקולה הינה : פונקציה f מדידה S הינה פונקציה המקיימת $f^{-1}(A)\in S$ לכל קבוצה A מדידה בורל.

פתרון: ברור כי ההגדרה השניה גוררת את ההגדרה הראשונה. כעת נוכיח כי ההגדרה הראשונה גוררת את השניה. נניח כי S הינה סיגמא אלגברה מעל X. נראה כי קבוצת כל הקבוצות $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימות $f^{-1}(A)\in S$ הינה סיגמא אלגברה. נסמן קבוצה זו ב $\mathcal{B}$.

i. $f^{-1}(\mathbb{R})=X\in S\Rightarrow\mathbb{R}\in\mathcal{B}$

ii. אם $f^{-1}(A)\in S$, כלומר $A\in\mathcal{B}$ אז $f^{-1}(A^c)=\left(f^{-1}(A)\right)^c\in S$ ולכן $A^c\in\mathcal{B}$.

iii. אם $f^{-1}(A_n)\in S$, כלומר $A_n\in\mathcal{B}$, אזי $f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)=\bigcup_n f^{-1}(A_n)\in S$, כלומר $\bigcup_n A_n\in\mathcal{B}$. מכאן כי $\mathcal{B}$ הינה סיגמא אלגברה.

כעת, עפ"י ההגדרה הראשונה ברור כי $(-\infty,\alpha]\in\mathcal{B}$ עבור כל $\alpha\in\mathbb{R}$. מכאן ש $\mathcal{B}$ הינה סיגמא אלגברה המכילה את הקטעים מהצורה $(-\infty,\alpha]$ ולכן מכילה את כל הקבוצות המדידות בורל.

4. יהי (X,S) מרחב מדיד ויהיו $f:X\to\mathbb{R}$ ו $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות לבג ובורל בהתאמה. הראו כי $h=g\circ f$ מדידה לבג.

פתרון: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה בורל, אזי $h^{-1}(A)=f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$. מכיוון ש g מדידה בורל נובע כי $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. מכיוון ש f מדידה לבג נובע כי $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ מדידה לבג ומכאן ש h מדידה לבג.

5. הראו כי אם פונקציה f הינה מונוטונית אזי היא מדידה.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי f מונוטונית עולה, אחרת נכפול ב 1- ומסגירות של פונקציות מדידות ביחס לכפל נקבל את הפתרון. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי נחלק לשני מקרים:
נגדיר $\beta=\inf\{x\mid f(x)>\alpha\}$

אם

I. $f(\beta)\notin f(\mathbb{R})$: אז $\{x\mid f(x)>\alpha\}=(\beta,\infty)$.

II. $f(\beta)\in f(\mathbb{R})$: $\{x\mid f(x)>\alpha\}=[\beta,\infty)$

6. **<u>תרגיל:</u>**

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\{x\in U: f \text{ is continuous at x}\}$ היא מטיפוס G_δ.

<u>פתרון:</u>

לכל $x \in U, \delta > 0$ נגדיר את התנודה ("oscillation") של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י $\omega(x,\delta) := \sup\{|f(s)-f(t)| : s,t \in B(x,\delta)\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x) := \inf\{\omega(x,\delta) : \delta > 0\}$.

אנו טוענים שלכל a ממשי הקבוצה $E_a = \{x : \omega(x) < a\}$ היא פתוחה.

<u>הוכחת הטענה:</u>

יהי $x_0 \in E_a$, ישנה $\delta_0 > 0$ כך ש- $\omega(x_0,\delta_0) = \sup\{|f(s)-f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$

(אחרת ה-inf של כולם לא היה קטן מ-a). לכן לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$,

$$\omega\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right) = \sup\left\{|f(s)-f(t)| : s,t \in B\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right)\right\} \le \sup\{|f(s)-f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$$

ומכאן כ-inf, $\omega(x) < a$ לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$, והטענה הוכחה.

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x אם"ם $\omega(x) = 0$ (אין תנודה בנקודה x) ולכן:

$\{x : f \text{ is continuous at x}\} = \{x : \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : \omega(x) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$. הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ כולן פתוחות, ולכן הקבוצה המדוברת היא באמת מטיפוס G_δ. מש"ל.