<u>תרגיל מספר 9 במבנים אלגבריים</u>

- תאריכי הגשה: הקבוצה של יום שלישי – 11/1. יום רביעי – 12/1. יום חמישי – 13/1
- נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול.
- ההגשה היא רק לקבוצות שאתם רשומים אליהן! תרגילים שיוגשו לקבוצות אחרות לא יבדקו.

<u>שאלה 1:</u>

א. הוכיחו כי חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים היא תת-חבורה נורמלית של חבורת האוטומורפיזמים.

ב. יהיו G ו- H חבורות מסדרים זרים. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}(G \times H) \cong \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(H)$.
תן דוגמא נגדית לטענה זו, כשהסדרים אינם זרים.

<u>שאלה 2:</u>

תהי G חבורה ציקלית מסדר p^r (p ראשוני) הראו כי G אינה יכולה להיות מכפלה ישרה של חבורות שונות מ- $\{1\}$ ($\{1\}$: החבורה המכילה רק את איבר היחידה).

<u>שאלה 3:</u>

א. הוכיחו כי יש רק חבורה אחת (<u>עד כדי איזומורפיזם</u>) מסדר 6 שאינה קומוטטיבית, בנו את לוח הכפל שלה. רשמו באיזו חבורה מדובר (למעשה אתם מכירים את חבורה זו ב-2 שמות שונים, ציינו את שניהם).

ב. הוכיחו כי ל – A_4 אין תת- חבורה מסדר 6.

<u>שאלה 4:</u>

תהי G חבורה מסדר 2p (p ראשוני). לאיזו חבורה G איזומורפית אם היא קומוטטיבית , ולאיזו חבורה G איזומורפית אם היא לא קומוטטיבית , פרטו כיצד הגעתם למסקנותיכם.

<u>שאלה 5:</u>

א. כמה חבורות קומוטטיביות שונות (עד כדי איזומורפיזם) קיימות מסדר 4320? פרטו והציגו בנוסף לכל מקרה את ההצגה שלו בצורה $Z_{\{d_1\}}x \ \dots \ x\, Z_{\{d_t\}}$ כאשר $d_1|d_2| \dots |d_t$.

ב. רשמו את החבורה U_{30} כמכפלה ישרה של חבורות ציקליות .

<u>שאלה 6:</u>

האם הקבוצות הבאות מהוות חוג ביחס לפעולות הכפל והחיבור ב-R? חוג חילוק? תחום שלמות?

א. $Z\left[\frac{1}{p}\right] = \{\frac{a}{p^n} : a, n \in Z\}$ כש- p מספר ראשוני.

ב. $B = \{x + y\sqrt[3]{5} : x, y \in Z\}$.

ג. $C = \{a+b\sqrt{11} : a,b \in Q\}$.

<u>שאלה 7:</u>

יהי A חוג כך שלכל x ב-A, מתקיים $x^2 = x$.

א. אם x ב-A, הוכיחו ש- $2x = 0$ (או, באופן שקול - $x = -x$) . הוכח ש-A קומוטטיבי (ביחס לפעולת הכפל).

ב. הוכיחו שאם $x, y \in A$, אז $xy(x + y) = 0$. אם אין מחלקי אפס ב-A, הוכיחו אז שאין יותר משני איברים ב-A.

<u>שאלה 8:</u>

יהי R[x] חוג הפולינומים מעל חוג קומוטטיבי R. נגדיר $K = \{f \in R[x] : f(137) = 0\}$.

א.הוכיחו ש-K אידיאל ב- R[x].

ב. נניח ש-R הוא שדה. הוכיחו ש- K הוא אידיאל מקסימלי (רמז: בנו הומומורפיזם $R[x] \to R$ כך ש-K יהיה הגרעין שלו).

ג. האם $M = \{ f \in R[x] : f(1) = 10\}$ הוא אידיאל ב- R[x]?

האם $L = \{ f \in R[x] : f(0) = 0\}$ הוא אידיאל ב- R[x]?

<u>שאלה 9:</u>

יהי R חוג קומוטטיבי. הוכיחו כי אם I אידיאל של R אזי $M_n(I)$ (מטריצות מסדר $n \times n$ שרכיביהן הם איברים של האידיאל I) הוא אידיאל של $M_n(R)$.