בס"ד

תרגול 9 באלגברה לינארית

הנושא: מכפלה פנימית

הגדרה: יהי V מ"ו (מעל) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית מעל V היא פונקציה $<,>: V\times V \to \mathbb{F}$ המתאימה לכל זוג וקטורים ב- V סקלר ב- $\mathbb{F}$ תחת התנאים הבאים:

לכל $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v,u,w \in V$

א. לינאריות במשתנה הראשון: $<\alpha v+\beta u, w> = \alpha<v,w> + \beta<u,w>$

ב. סימטריות: $<u,v> = \overline{<v,u>}$

ג. אי-שליליות: $<v,v> \geq 0$ ו- $<v,v> = 0$ אם"ם $v=0$.

הערות:

1. נזכר שאם $z\in\mathbb{C}$, למשל $z=a+bi$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$, אז: $\bar{z} = a-bi$ ו- z הוא ממשי אם"ם $\bar{z} = z$. לכן אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז סעיף ב' הוא: $<u,v> = <v,u>$.

2. ניתן להוכיח שהמכפלה הפנימית היא לינארית צמודה במשתנה השני, כלומר,
$<u, av_1+bv_2> = \bar{a}<u,v_1> + \bar{b}<u,v_2>$

ניתן להוכיח באופן אנלוגי:

$$<a_1u_1+a_2u_2, b_1v_1+b_2v_2> =$$
$$= a_1\bar{b}_1<u_1,v_1> + a_1\bar{b}_2<u_1,v_2> + a_2\bar{b}_1<u_2,v_1> + a_2\bar{b}_2<u_2,v_2>.$$

3. לפי סימטריות: $<u,u> = \overline{<u,u>}$. לכן $<u,u>$ חייב להיות מס' ממשי. לפי אי-שליליות (סעיף ג' בהגדרה) $<u,u>$ חייב להיות אי-שלילי, ולכן קיים השורש הריבועי הממשי שלו. נסמן: $\|u\| = \sqrt{<u,u>}$. מס' ממשי אי-שלילי זה נקרא - הנורמה או האורך של u.

דוגמאות:

1. נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^n$. המכפלה הסקלרית ב- $\mathbb{R}^n$ מוגדרת ע"י:
$u\cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$
כאשר $u=(a_1,\dots,a_n)$ ו- $v=(b_1,\dots,b_n)$. פונקציה זו מגדירה מכפלה פנימית (סטנדרטית) ב- $\mathbb{R}^n$, כגון: $<(1,2,3),(4,5,6)> = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32$.

הנורמה ב- $\mathbb{R}^n$ היא:
$$\|u\| = \sqrt{<u,u>} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

כגון:
$$\|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} = 3.74$$

בס"ד

לעיתים קרובות, הוקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ מיוצגים ע"י מטריצות עמודה $n\times 1$. במקרה זה ניתן להגדיר את המכפלה הפנימית הנ"ל על $\mathbb{R}^n$ ע"י:

$$<u,v> = \underbrace{u^T\cdot v}_{\text{כפל מטריצות}}$$

כגון:
$$<\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}> = \underbrace{(1,2,3)}_{\text{מטריצה } 1\times 3}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}_{\text{מטריצה } 3\times 1} = 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6=32$$

דוגמא

② יהי V המרחב הוקטורי של פונקציות ממשיות רציפות על הקטע $a\le t\le b$ ($f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$). אזי ההגדרה הבאה מהווה מכפלה פנימית על V:
$$<f,g> = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$
כאשר $f(t)$, $g(t)$ הן פונקציות כלשהן שרציפות על $[a,b]$.

דוגמא

③ יהי V המרחב הוקטורי של מטריצות $m\times n$ מעל $\mathbb{R}$. ההגדרה הבאה היא מכפלה פנימית על V:
$$<A,B> = tr(B^T\cdot A)$$
כאשר tr מציין עקבה, כלומר סכום איברי האלכסון.

כגון:
$$<\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&3\\4&5&2\end{bmatrix}}_{A},\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&3\\4&0&5\end{bmatrix}}_{B}> = tr\left(\underbrace{\begin{bmatrix}2&4\\0&0\\3&5\end{bmatrix}}_{B^t}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&3\\4&5&2\end{bmatrix}}_{A}\right) =$$
$$= tr\begin{pmatrix}18&20&14\\0&0&0\\23&25&19\end{pmatrix} = 37$$

$$\|A\| = \sqrt{<A,A>} = \left\|\begin{bmatrix}1&0&3\\4&5&2\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+0^2+3^2+4^2+5^2+2^2} = \sqrt{55}$$

השורש של סכום הריבועים של כל האיברים של A

תוספת

<u>משפט קושי-שוורץ</u>: לכל הוקטורים $u,v\in V$ מתקיים: $|<u,v>| \le \|u\|\cdot\|v\|$

ערך-מוחלט

<u>הערות</u>:

① אם $\|u\|=1$, או לחלופין אם $<u,u>=1$, אז u נקרא <u>וקטור יחידה</u> ואומרים שהוא <u>מנורמל</u>. ניתן להכפיל כל וקטור $v\in V$ שונה מאפס ב- $\frac{1}{\|v\|}$

דוגמא

4. המכפלה הפנימית הסטנדרטית מעל $\mathbb{C}^n$ מוגדרת ע"י:

$$\langle a,b\rangle=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\overline{b_i}$$

לדוגמא: אם $a=(i,2+i,1-i)$, $b=(1+i,3,2-i)$ אז:

$$\langle a,b\rangle = i\overline{(1+i)}+(2+i)\cdot 3+(1-i)\cdot\overline{(2-i)}=$$

$$=i(1-i)+(2+i)\cdot 3+(1-i)(2+i)=$$

$$=\cancel{i}+1+6+3i+2+\cancel{i}-\cancel{2i}+1=10+3i$$

דוגמא

5. דוגמא למכפלה פנימית (מ"פ) לא סטנדרטית ב- $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1\cdot x_2+2y_1y_2$$

נבדוק שזו אכן מכפלה פנימית:

א. לינאריות במשתנה הראשון:

$$\langle \alpha \overset{(x_1,y_1)}{v}+\beta \overset{(x_2,y_2)}{u}, \underset{(x_3,y_3)}{w}\rangle=\langle \alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle=$$

$$=\langle(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2),(x_3,y_3)\rangle=$$ חיבור וקטורים רגיל

הגדרת המ"פ $\longrightarrow$ $=(\alpha x_1+\beta x_2)\cdot x_3+2(\alpha y_1+\beta y_2)y_3=$

הוצאת גורם משותף $\longrightarrow$ $=\alpha(x_1x_3+2y_1y_3)+\beta(x_2x_3+2y_2y_3)=$

הגדרת המ"פ $\longrightarrow$ $=\alpha\langle(x_1,y_1),(x_3,y_3)\rangle+\beta\langle(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle=$

$$=\alpha\langle v,w\rangle+\beta\langle u,w\rangle.$$

ב. סימטריות: נוכיח ש: $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}\overset{\text{מעל } R}{=}\langle v,u\rangle$

$$\langle u,v\rangle=\langle(x_2,y_2),(x_1,y_1)\rangle=x_2x_1+2y_2y_1$$

$$\langle v,u\rangle=\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=x_1x_2+2y_1y_2$$

שווים בגלל חילופיות הכפל ב- R

ג. אי-שליליות: עבור $v=(x_1,y_1)$:

(i) $\langle v,v\rangle=\langle(x_1,y_1),(x_1,y_1)\rangle=x_1^2+2y_1^2\geq 0$ ✓

(ii) נוכיח ש: $\langle v,v\rangle=0\Leftrightarrow v=\vec{0}$

$$\langle v,v\rangle=0\Leftrightarrow\langle(x_1,y_1),(x_1,y_1)\rangle=0\Leftrightarrow x_1^2+2y_1^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}\Leftrightarrow(x_1,y_1)=\vec{0}\Leftrightarrow v=\vec{0}$$

מש"ל.

בס"ד

וכך לקבל את וקטור היחידה. תהליך זה נקרא <u>נירמול</u>.

דוגמא: ננרמל את $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. תחילה נחשב את הנורמה של v:

$$\|v\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = 3.74$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|}\cdot v = \frac{1}{3.74}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3.74}\\ \frac{2}{3.74}\\ \frac{3}{3.74}\end{pmatrix}$$

וניתן לחשב ולראות ש: $\|\hat{v}\|=1$.

2. המס' הממשי האי-שלילי $d(u,v)=\|u-v\|$ נקרא <u>המרחק בין u ל-v</u>.

3. עבור וקטורים שונים מאפס $u,v\in V$ כלשהם, הזוית בין u ו-v מוגדרת כזוית θ כך ש- $0\le\theta\le\pi$ ו- $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$.

לפי אי-שיוויון קושי-שוורץ $-1\le\cos\theta\le 1$, כך שהזוית θ תמיד קיימת והינה יחידה.

<u>אורתוגונליות (ניצבות)</u>

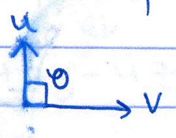
<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית. אומרים שהוקטורים $u,v\in V$ <u>אורתוגונליים</u> (ניצבים) ו-u נקרא <u>אורתוגונלי</u> ל-v אם $\langle u,v\rangle=0$.
היחס הוא בבירור סימטרי, כלומר, אם u אורתוגונלי ל-v, אז $\langle v,u\rangle=0$ וכך v אורתוגונלי ל-u.

* נשים לב ש- $0\in V$ אורתוגונלי לכל $v\in V$ כי:

$$\langle 0,v\rangle = \langle 0v,v\rangle = 0\langle v,v\rangle = 0$$

ולהיפך אם u אורתוגונלי לכל $v\in V$, אז $\langle u,u\rangle=0$ ולכן $u=0$.
(כי u גם אורתוגונלי לעצמו, כי $u\in V$)

* שים לב ש-u ו-v אורתוגונליים אם"ם $\cos\theta=0$ (כי אם נציב $\langle u,v\rangle=0$ בנוסחה לעיל נקבל ש- $\cos\theta=0$), כאשר θ היא הזוית בין u ל-v, ולכן נאמר אם"ם u ו-v "ניצבים", כלומר $\theta=90^\circ$.



המשך בדף הבא

בס"ד

תרגיל: מצאו וקטור שונה מ-0 שאורתוגונלי ל-$v_1=(1,3,5)$ ול-$v_2=(0,1,4)$ ב-$\mathbb{R}^3$, ונרמל אותו.

פתרון:

יהי $w=(x,y,z)$. נדרוש ש:

$$0=\langle v_1,w\rangle = 1\cdot x+3\cdot y+5\cdot z$$
$$0=\langle v_2,w\rangle = 0\cdot x+1\cdot y+4\cdot z$$
$$\Downarrow$$

כך מתקבל המערכת ההומוגנית:
$$\begin{cases} x+3y+5z=0 \\ y+4z=0 \end{cases}$$

נציב $z=1$ ונקבל $y=-4$, $x=7$. לכן $w=(7,-4,1)$ הוא אורתוגונלי ל-v_1 ו-v_2. כשננרמל את w נקבל:

$$\hat{w}=\frac{w}{\|w\|}=\frac{(7,-4,1)}{\sqrt{7^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{(7,-4,1)}{\sqrt{66}}=\left(\frac{7}{\sqrt{66}},\frac{-4}{\sqrt{66}},\frac{1}{\sqrt{66}}\right)$$

שהוא וקטור יחידה אורתוגונלי ל-v_1 ו-v_2. משל.

משלימים אורתוגונליים

הגדרה: תהי S תת-קבוצה של מרחב מכפלה פנימית (מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית) V. המשלים האורתוגונלי של S, שיסומן ב-$S^\perp$ (קרא: "S-ניצב") מורכב מאותם וקטורים ב-V שהם אורתוגונליים לכל וקטור $u\in S$:
$$S^\perp=\{v\in V \mid \langle v,u\rangle=0,\ \forall u\in S\}.$$

בפרט, עבור וקטור נתון u ב-V:
$$u^\perp=\{v\in V \mid \langle v,u\rangle=0\}.$$

כלומר, $u^\perp$ מורכב מכל הוקטורים ב-V שאורתוגונליים לוקטור u.

טענה: $S^\perp$ הוא תת-מרחב של V ונקרא - "תת המרחב הניצב".

תרגיל: מצא בסיס לתת-המרחב $u^\perp$ ב-$\mathbb{R}^3$ כאשר $u=(1,3,-4)$.

פתרון:

$u^\perp$ מורכב מכל הוקטורים (x,y,z) כך ש- $\langle (x,y,z),(1,3,-4)\rangle=0$
$$\Downarrow$$
$$x+3y-4z=0$$

המשתנים החופשיים הם y ו-z. נציב:

1. $z=0$, $y=-1$ ונקבל את הפתרון: $w_1=(3,-1,0)$.
2. $z=1$, $y=0$ ונקבל את הפתרון: $w_2=(4,0,1)$.

<u>דס״צ</u>

הוקטורים w_1 ו-w_2 יוצרים בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה ולכן בסיס ל- $u^{\perp}$.

<u>מש״ל.</u>

<u>משפט</u>: יהי W תת-מרחב של V. אזי V הוא הסכום הישר של W ו- $W^{\perp}$ כלומר: $V=W\oplus W^{\perp}$.

<u>דוגמא</u>: יהי W ציר ה-z ב-$\mathbb{R}^3$, כלומר, $W=\{(0,0,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$.
אזי $W^{\perp}$ הוא מישור xy, או במילים אחרות:

$$W^{\perp}=\{(a,b,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

ולפי המשפט מתקיים: $\mathbb{R}^3=W\oplus W^{\perp}$.

<u>תרגיל</u>: יהי W תת-המרחב של $\mathbb{R}^5$ הנפרש ע״י: $u=(1,2,3,-1,2)$ ו- $v=(2,4,7,2,-1)$. מצא בסיס למשלים האורתוגונלי $W^{\perp}$ של W.

<u>פתרון</u>:

אנו מחפשים את כל הוקטורים $w=(x,y,z,s,t)$ כך ש-

$$\langle w,u\rangle = x+2y+3z-s+2t=0$$
$$\langle w,v\rangle = 2x+4y+7z+2s-t=0$$

נדרג את המערכת הנ״ל ונקבל את המערכת השקולה:

$$\begin{cases} x+2y+3z-s+2t=0 \\ z+4s-5t=0 \end{cases}$$

המשתנים החופשיים הם y, s ו- t. לכן:

<u>1</u>. נציב $y=-1$, $s=0$, $t=0$ ונקבל את הפתרון: $w_1=(2,-1,0,0,0)$.
<u>2</u>. נציב $y=0$, $s=1$, $t=0$ " " " : $w_2=(13,0,-4,1,0)$.
<u>3</u>. נציב $y=0$, $s=0$, $t=1$ " " " : $w_3=(-17,0,5,0,1)$.

הקבוצה $\{w_1,w_2,w_3\}$ מהווה בסיס של $W^{\perp}$.

<u>מש״ל.</u>

(8)

תרגיל: תהי S קבוצה אורתוגונלית כך ש: $0 \notin S$. הוכח ש-S בת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה S לא בת"ל

$$S = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

ונניח בה"כ v_n תלוי באחרים. כלומר $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$

(לפחות אחד מה-$\alpha_i \neq 0$
כי אחרת $v_n = 0$ אבל נתון $0 \notin S$)

נניח $\alpha_j \neq 0$.

$$\langle v_n, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \,,\, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_j \rangle}_{=0} + \ldots + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + \ldots + \alpha_{n-1} \underbrace{\langle v_{n-1}, v_j \rangle}_{=0}$$

כי נתון S אורתוגונלית

$$= \underbrace{\alpha_j}_{\neq 0} \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0} \neq 0$$

$\Leftarrow$ קיבלנו $\langle v_n, v_j \rangle \neq 0$ סתירה! הנחנו S אורתוגונלית

כי $\langle v_j, v_j \rangle = 0$ אם"ם $v_j = 0$
ונתון ש- $0 \notin S$.

מש"ל