לינארית 2 מדמח

מטלה 6

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים: מספר תרגיל, שם מלא, ת.ז וסימן זיהוי לקבוצת התירגול שלכם (מספר קבוצה או יום +שעה).
ענו על השאלות הבאות:

1. תהא $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ה"ל. נתונה המטריצה המייצגת של T

$$[T]_B^S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

עבור הבסיסים $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של התחום ו $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ של הטווח.
מצאו את המטריצות $[T]_B^B$, $[T^2]_B^B$ וכתבו מפורשות מפורשות את T, כלומר לאן T שולחת וקטור כללי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ [תזכורת סימונים: T^2 היא ה"ל המוגדרת $T \circ T$].
פתרון:
מתקיים כי

$$[T]_B^B = [T]_B^S [I]_S^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$[T^2]_B^B = [T]_B^B [T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונשאר למצוא את T. קל לראות כי

$$[e_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [e_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [e_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וכיוון שמתקיים

$$[T^2 e_i]_B = [T^2]_B^B [e_i]_B$$

לכל i נוכל לחשב

$$[Te_1]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[Te_2]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[Te_3]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולמצוא

$$Te_1 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Te_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Te_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xTe_1 + yTe_2 + zTe_3 = x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. תהא $T : V \to W$ ה"ל חח"ע. הוכיחו כי $\dim V \leq \dim W$

פתרון:

כיוון Tחח"ע, לפי משפט מתקיים כי $\ker T = \{0\}$ ולכן $\dim \ker T = 0$. כעת לפי משפט המימדים מתקיים

$$\dim Im(T) = \dim V - \dim \ker T = \dim V$$

ועם נחבר את העובדה ש $\dim Im(T) \leq \dim W$ (כי $Im(T) \leq W$) נקבל את המבוקש.

3.

(א) תהא $T : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$ המוגדרת ע"י $p(x) \mapsto p(0) + p(1)x + p(-1) \cdot x^2$ כאשר $p(0)/p(1)/p(-1)$ זה הצבה $0/1/-1$ בפולוניום $p(x)$. הוכיחו כי T לכסינה ומצאו בסיס B כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית.

פתרון:

נמצא מטריצה מייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי $S=\left\{1,x,x^2\right\}$:

$$A=[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$p_T(\lambda)=p_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2+1\right]=$$

$$=(\lambda-1)\left[\lambda^2-2\lambda+2\right]=(\lambda-1)\left(\lambda-(1+i)\right)\left(\lambda-(1-i)\right)$$

כאשר המעבר האחרון מסתמך על

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

ולכן T לכסינה כי יש לה 3 ע"ע שונים. כעת נחשב ו"ע:

עבור $\lambda_1=1$

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}-t\\-t\\t\end{pmatrix}:t\in\mathbb{C}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda_2=1+i$

$$A-(1+i)\,I=\begin{pmatrix}-i&0&0\\1&-i&1\\1&-1&-i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-i&0&0\\0&-i&1\\0&-1&-i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-i&0&0\\0&-i&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{1+i}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-it\\t\end{pmatrix}:t\in\mathbb{C}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\-i\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda_3=1-i$

$$A-(1-i)\,I=\begin{pmatrix}i&0&0\\1&i&1\\1&-1&i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}i&0&0\\0&i&1\\0&-1&i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-i&0&0\\0&i&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{1-i}=\left\{\left(\begin{array}{c}0\\ it\\ t\end{array}\right):t\in\mathbb{C}\right\}=span\left\{\left(\begin{array}{c}0\\ i\\ 1\end{array}\right)\right\}$$

אם נחזור למרחב שלנו $\mathbb{C}_2[x]$ נקבל כי $p_1(x)=-1-x+x^2$ ו"ע של ע"ע λ_1, $p_2(x)=-ix+x^2$ ו"ע של ע"ע λ_2, $p_3(x)=ix+x^2$ ו"ע של ע"ע λ_3 כלומר $T(p_i(x))=\lambda_i p_i(x)$ ולכן עבור הבסיס $B=\{p_1,p_2,p_3\}$ נקבל כי

$$[T]_B^B=\left(\begin{array}{ccc}| & | & |\\ [T(p_1)]_B & [T(p_2)]_B & [T(p_3)]_B\\ | & | & |\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}| & | & |\\ [\lambda_1p_1]_B & [\lambda_2p_2]_B & [\lambda_3p_3]_B\\ | & | & |\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{array}\right)$$

כנדרש.

(ב) מיצאו את הפירוק הפרימרי של $\mathbb{C}_2[x]$ ביחס להעתקה T.

פתרון:

כיוון ש T לכסינה הפ"א שווה לפ"מ שהוא

$$m_T(\lambda)=(\lambda-1)\left(\lambda-(1+i)\right)\left(\lambda-(1-i)\right)$$

מסעיף קודם. לכן לפי משפט הפירוק הפרימרי

$$\mathbb{C}_2[x]=\ker\left(T-I\right)\oplus\ker\left(T-(1+i)I\right)\oplus\ker\left(T-(1-i)I\right)=V_1\oplus V_{1-i}\oplus V_{1+i}$$

עבור המרחבים העצמיים שמצאנו בסעיף הקודם.

.4

(א) תהא $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x)\mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה D־ אינווראינטים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

פתרון:

יהא W ת"מ D־ איוואראנטי שונה מאפס. יהא $p(x)\in D$ בעל הדרגה המקס', נסמנה d. כיוון שW הוא D ־ אינוואראנטי אזי $D(p(x))=p'(x)\in W$ וגם $D^2(p(x))=p"(x)\in W$ ובאופן דומה לכל $0\leq i\leq d$ מתקיים כי

$$D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\in W$$

כאשר $p^{(i)}(x)$ פירושו הנגזרת ה i־ ית של $p(x)$. כיוון ש $p(x)$ מדרגה d נקבל כי $D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\neq 0$ לכל $0\leq i\leq d$. ולכן מצאנו $\left\{D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\right\}_{i=0}^d\subseteq W\subseteq\mathbb{R}_d[x]$ קבוצה בת"ל. כיוון ש

$$d+1=\dim span\left\{D^i(p(x))=p^{(i)}(x)\right\}_{i=0}^d\leq\dim W\leq\dim\mathbb{R}_d[x]=d+1$$

נקבל כי $W=\mathbb{R}_d[x]$ (כי $W\subseteq\mathbb{R}_d[x]$ מאותו מימד).

בנוסף כיוון ש $\mathbb{R}_d[x]$ לכל $0\leq d\leq n$ הוא ת"מ D־ אניוואראנטי נקבל שאלו כל ת"מ ה D־ אינוואראנטים היחידים (עם תת מרחב האפס).

(ב) נגדיר ה"ל $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת $T(p(x))=p'(x)+p(0)$. מצאו את הע"ע/ו"ע/מ"ע/פ"מ של T, קבעו אם היא לכסינה ומצאו את הפירוק הפרימרי של $\mathbb{R}_3[x]$ ביחס ל T.

פתרון:
המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי $S=\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ היא

$$A=[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מטריצה משולשית עליונה ולכן $p_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)$ ו $\lambda=0,1$ שני ע"ע. נחשב מ"ע (של המטריצה המייצגת): עבור 0 נקבל

$$N(A-0I)=N(\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix})=span\left\{\begin{pmatrix}-t\\t\\0\\0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ועבור 1 נקבל

$$N(A-I)=N(\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix})=\cdots=N(\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix})=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן המ"ע של T הם:

$$V_0=span\left\{-1+x\right\}$$

$$V_1=span\left\{1\right\}$$

ולכן T אינה לכסינה כי אין בסיס של ו"ע. כעת, מחישוב ישיר מקבלים ש $\left(A-I\right)A\neq0,\left(A-I\right)A^2\neq0,\left(A-I\right)A^3=0$ ולכן הפ"מ שווה לפ"א $m_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)$. משפט הפירוק הפרימרי אומר כי

$$\mathbb{R}_3[x]=\ker T^3\oplus\ker\left(T-I\right)$$

כאשר $\ker(T-I)=V_1$ שחישבנו ו

$$\ker T^3=N(A^3)=N(\begin{pmatrix}1&1&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix})=span\left\{\begin{pmatrix}-6r-2s-t\\t\\s\\r\end{pmatrix}:r,s,t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בהצלחה! ☺