תרגול 10- פירוק זורדן

הגדרה. בלוק זורדן הוא מטריצה מהצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{k\times k}$$

למשל:

$$J_3(0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},J_4(1)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

עובדות:

1. בלוק זורדן אינו לכסין (עבור $k>1$). יש לו ו"ע עצמי יחיד $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ של ע"ע λ.
2. פ"א=פ"מ . למשל ל $J_k(3)$ זהו $(\lambda-3)^k$
3. מתקיים כי $J_k(\lambda)=J_k(0)+\lambda I$

הגדרה. מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא בצורת זורדן אם היא מטריצת אלכסונית בלוקים כאשר כל בלוק הוא בלוק זורדן. כלומר מהצורה

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ \hline & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_{k_t}(\lambda_t)\end{array}\right)$$

משפט. $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ צמודה למטריצה בצורת זורדן (כלומר קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=J$, J בצורת זורדן) אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל.

במקרה זה מתקיים במטריצה J כי

1. מספר הפעמים שע"ע λ_0 מופיע על האלכסון = ר"א של λ_0.
2. מספר הבלוקים של λ_0 = ר"ג של λ_0.
3. גודל הבלוק הגדול ביותר = החזקה של $(\lambda-\lambda_0)$ בפ"מ.

הערה. המטריצה J נקראת צורת זורדן של A והיא יחידה עד כדי סדר בלוקים, כלומר מטריצות דומות אם ורק אם יש להם אותה צורת זורדן.

תרגיל. תהי מטריצה $A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ מצאו את צורות זורדן האפשריות

פתרון. מתקיים כי:

1. פ"א = $p_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^3$
2. פ"מ $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$
3. ר"ג: $\dim V_1=2,\dim V_{-2}=1$
4. מתקיים

λ	Alg.=#λ	Blocks Geo.=#	in Power m_A = Block Biggest
1	3	2	2
-2	1	1	1

ולכן צורת זורדן של A היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c}1&1&&\\&1&&\\\hline&&1&\\\hline&&&-2\end{array}\right)$$

תרגיל. תהי מטריצה A המקיימת

1. $p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)^4$
2. $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$ מהן צורות הזורדן האפשריות

ולכן נסיק כי מתקיים

λ	Alg.=#λ	Blocks Geo.=#	in Power m_A = Block Biggest
2	3	$\in\{1,2,3\}$	2
4	4	$\in\{1,2,3,4\}$	2

ולכן צורות זורדן האפשריות של A הם

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc|c|c}2&1&&&&&\\&2&&&&&\\\hline&&2&&&&\\\hline&&&4&1&&\\&&&&4&&\\\hline&&&&&4&\\\hline&&&&&&4\end{array}\right)$$

או

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc|cc} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ \hline & & 2 & & & & \\ \hline & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ \hline & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{array}\right)$$

שימו לב כי אם יש ר"א של 2 הוא 3 אזי יש לו לכל היותר 3 בלוקים. כיוון שהבלוק הגדול הוא מסדר 2 (כלומר יש שתי 3 "ביחד") אזי מספר הבלוקים הוא לכל היותר 2. בנוסף לא יכול להיות בלוק יחיד כי אז הוא מסדר 3 בניגוד לנתון שהגדול מסדר 2. שיקולים דומים אפשר להפעיל על ע"ע =4.

תרגיל. תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ נסמן ב- V_λאת המ"ע של λ. אלו מהמשפטים הבאים נכון?

1. $dim\left(V_2\right) = 3$
2. $V_2 \oplus V_5 = \mathbb{R}^4$
3. $dim\left(V_2\right) + dim\left(V_5\right) = 3$
4. טענות 1 עד 3 אינן נכונות

פתרון. נשים לב ש-A היא כבר מצורת זורדן לכן

- $dim\left(V_2\right) = 2$ כיוון שיש שני בלוקים לע"ע 2
- $dim\left(V_5\right) = 1$ כיוון שיש שני בלוקים לע"ע

מכאן טענה 3 נכונה.