שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)
סמסטר ב; מועד ב. תשע"ב
שם המרצה: ד"ר שחר נבו.
משך הבחינה $2\frac{3}{4}$ שעות.

<u>ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף</u>

<u>ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.</u>

1. א. בדוק התכנסות והתכנסות בהחלט של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

ב.חשב $\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx$.

2. א. האם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$? אם כן מהו?

ב.הראה שהלפלסיאן של $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ $(x,y)\neq(0,0)$ הוא 0.

3. א. מהו רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot(-2)^n}$, **ועבור אילו ערכי** x הוא מתכנס?

ב. מצא אורך גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. א. חשב את השטח בין גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x}$, המשיק בנקודה $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ וציר y.

ב. הצג $\ln 5$ כטור אינסופי.

5. א. מצא כל הפתרונות של המד"ר $y'=\frac{-x^3}{(y+1)^2}$.

ב. מצא פתרון המקיים $y(0)=1$.

6. א. מצא פתרון למד"ר $y''-3y'+2y=0$ המקיים $y'(0)=4, y(0)=1$.

ב. האם יש מד"ר מהצורה $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ אשר $y_2(x)=\sin x, y_1(x)=x$ הם פתרונות שלה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>בהצלחה!</u>

שאלה 1

ב. $\int\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2dx=\int\left(1+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx=x+\frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}+c$.

שאלה 3

א. נחשב את רדיוס ההתכנסות $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot(-2)^n}\right|}=\frac{1}{2}$ רדיוס ההתכנסות הוא 2.

יש לבדוק את ההתכנסות בקצוות ז"א עבור $x=2, x=-2$.

עבור $x=2$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot(-2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ קיבלנו טור מתכנס.

עבור $x=-2$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot(-2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ קיבלנו טור מתבדר.

ב. יש לחשב $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx=\left[\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4}$.

שאלה 4

א. נמצא את משוואת המשיק בנקודה $\left(1,\frac{1}{2}\right)$. $f'(1)=-\frac{1}{4}\Leftarrow f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$.

משוואת המשיק $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\Leftarrow y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-1)$.

השטח המבוקש הוא $\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)dx=\left[\ln|1+x|+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x\right]_0^1=\ln 2-\frac{5}{8}$.

ב. נחשב טור טיילור עבור $\ln\frac{1+x}{1-x}$. $\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$.

ראינו ש $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ולכן $\frac{2}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}$ ומכיוון ש $\int\frac{2}{1-x^2}dx=\ln\frac{1+x}{1-x}$ נקבל

$\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$. $\ln 5=\ln\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$.

שאלה 5

א. $\frac{(y+1)^3}{3}=\frac{-x^4}{4}+c\Leftarrow(y+1)^2dy=-x^3dx\Leftarrow y'=\frac{-x^3}{(y+1)^2}$

ב. נתון ש $c=\frac{8}{3}\Leftarrow\frac{(1+1)^3}{3}=\frac{-0^4}{4}+c\Leftarrow y(0)=1$ ואז הפתרון $\frac{(y+1)^3}{3}=\frac{-x^4}{4}+\frac{8}{3}$.