אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 9

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. מספר מרוכב α נקרא שלם אלגברי אם קיים פולינום מתוקן $p \in \mathbb{Z}[x]$ כך ש $p(\alpha) = 0$. הם מהווים תת-חוג של שדה המספרים המרוכבים. נסמנו B.
   a. הוכיחו כי אם $b \in B$ אזי $\sqrt{b} \in B$.
   b. הסיקו כי B איננו אטומי.
2. יהי $D \in \mathbb{Z}$ חופשי מריבועים. הוכיחו כי $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & bD \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. הציגו את $x^3 - 9 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ כמכפלת פולינומים אי-פריקים.
4. פרקו את $130i$ למכפלת ראשוניים ב $\mathbb{Z}[i]$.
5. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של $x^4 + 3x^3 + 4x + 2$ ו $x^3 + 2x + 2$ ב $\mathbb{Z}_5[x]$. בטאו אותו כצירוף ליניארי של שני הפולינומים.
6. יהי R תחום שלמות. לקבוצה $S \subseteq R$ נגדיר $S^* = \{ s \in S : \exists_{a \in S} a + < s > \subseteq S \}$. נסמן $R_0 = R \setminus \{0\}$ ו $R_{i+1} = R_i^*$. הראו ש R_1 היא קבוצת האיברים הלא הפיכים השונים מאפס ב R. הראו שאם R אוקלידי אז $\bigcap_{i=0}^{\infty} R_i = \phi$. [רמז: הראו באינדוקציה ש $d(s) \geq n$ לכל $s \in R_n$]