88195 מתמטיקה בדידה: תורת הגרפים

גרף מישורי

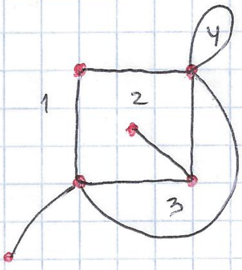
__הגדרה:__ גרף נקרא מישורי (planar) אם ניתן לצייר במישור כך שאף קשת לא חותכת את עצמה או קשת אחרת, פרט לקשתות הנפגשות בקדקוד משותף.

__דוגמה:__

ציור במישור בלי קשתות נחתכות

גרף מישורי

כאשר מציירים גרף במישור (בלי קשתות נחתכות), __המשלים__ של איחוד כל הקשתות ("הלבן" בציור) הוא איחוד זר של רכיבי קשירות, הנקראים __תחומים__ (regions) או __פאות__ (faces). אחד מהם הוא "התחום החיצוני", המקיף את הציור.



__דוגמה:__ גרף מצויר במישור עם 4 תחומים.

__משפט:__ (נוסחת אוילר לגרף מישורי)

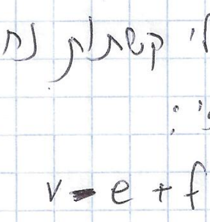
יהי G גרף בעל v קדקודים, e קשתות ו-c רכיבי קשירות (של הגרף עצמו). נניח ש-G ניתן לצייר במישור (בלי קשתות נחתכות) עם f תחומים (רכיבי קשירות של המשלים). אזי:

$$v-e+f=c+1$$

בפרט, אם G גרף מישורי __קשיר__ ($c=1$) אז

$$v-e+f=2$$

__דוגמה:__



$v=5,\ e=7,\ f=4,\ c=1$

$v-e+f=2=c+1$

אם נוסיף עוד רכיב קשירות , נקבל:

$v=7,\ e=8,\ f=4,\ c=2 \Rightarrow v-e+f=3=c+1$

הוכחת המשפט:

באינדוקציה על e, מספר הקשתות.

<u>$e=0$:</u> גרף בלי קשתות מורכב מ-v קדקודים מבודדים (תחום יחיד).

v, $e=0$, $f=1$, $c=v$

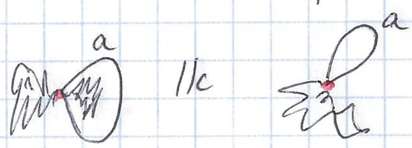
$v-e+f = v+1 = c+1$ ✓

<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח שהמשפט נכון לכל גרף עם $e-1$ קשתות, ונוכיח אותו עבור כל גרף G עם e קשתות ($e>0$).

נבחר קשת כלשהי a של הגרף, ונשמיט אותה. ״תכנו כמה מקרים.

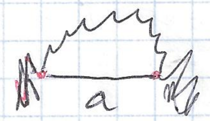
(א) a <u>לולאה</u>: השמטת a אינה משנה את מספר רכיבי הקשירות, אך מאחדת שני תחומים שהיו משני צדדיה. בגרף החדש G':

$v'=v$, $e'=e-1$, $f'=f-1$, $c'=c$

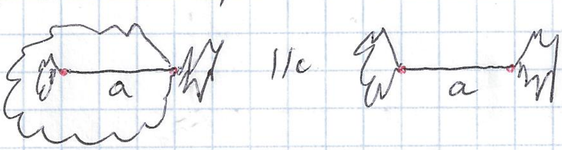


$$v-e+f = v'-(e'+1)+(f'+1) =$$
$$= v'-e'+f' \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} c'+1 = c+1 \quad ✓$$

(ב) a אינה לולאה, והשמטתה <u>אינה משנה</u> את מספר רכיבי הקשירות: במקרה זה, בגרף החדש G' יש מסילה המחברת את שני קדקודי a, לכן בגרף המקורי יש שני תחומים <u>שונים</u> מצידי a, המתאחדים בגרף החדש. החישוב זהה למקרה הקודם: $v'=v, e'=e-1, f'=f-1, c'=c$, עם אותה מסקנה.



(ג) a אינה לולאה, והשמטתה <u>מגדילה</u> את מספר רכיבי הקשירות: במקרה זה, בגרף החדש G' <u>אין</u> מסילה המחברת את שני קדקודי a, ולכן בגרף המקורי יש תחום <u>אחד</u> משני צידי a. כאן

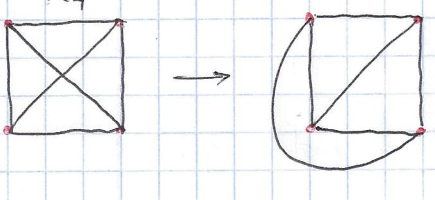


$v'=v$, $e'=e-1$, $f'=f$, $c'=c+1$

$$v-e+f = v'-(e'+1)+f' = (v'-e'+f')-1 = (c'+1)-1 = c+1 \quad ✓$$

עברנו על כל האפשרויות, ובכך סיימנו את שלב האינדוקציה ואת הוכחת המשפט. □

K_4

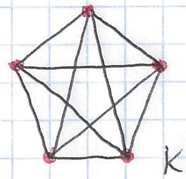


יישום: (של נוסחת אוילר)

הגרף השלם K_4 הוא מישורי:

מה לגבי הגרף השלם K_5?

הנתונים עבור K_5 הם:



K_5

$v=5$, $e=\frac{5\cdot 4}{2}=10$, $c=1$

לפי נוסחת אוילר, אם ניתן לצייר במישור (בלי קשתות נחתכות) עם f תחומים אז: $v-e+f=c+1$

$5-10+f=1+1 \Rightarrow \underline{f=7}$

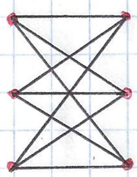
מצד שני, השפה של כל אחד מהתחומים מכילה לפחות 3 קשתות (קשת אחת בשפה אפשרית רק אם יש לולאה: ; 2 קשתות בשפה אפשריות רק אם יש קשתות כפולות: ; K_5 הוא גרף פשוט, שאין בו לולאות או קשתות כפולות).

כמו כן, לכל קשת בגרף K_5 המצויר במישור יש שני תחומים <u>שונים</u> משני צידיה (אחרת השמטתה תגדיל את מס' רכיבי הקשירות של הגרף, כמו שראינו בהוכחת המשפט, וקל לראות שזה לא קורה ב-K_5).

משתי העובדות האלו נובע: $2e \geq 3f$, כלומר $20 \geq 21$, וזה כמובן לא נכון. לכן K_5 <u>אינו</u> מישורי.

שאלה: האם הגרף הדו-צדדי השלם $K_{3,3}$ הוא מישורי?

הנתונים עבור $K_{3,3}$ הם:



$K_{3,3}$

$v=6$, $e=3\cdot 3=9$, $c=1$

לפי נוסחת אוילר, אם ניתן לצייר את $K_{3,3}$ במישור (בלי קשתות נחתכות) עם f תחומים אז:

$6-9+f=1+1 \Rightarrow \underline{f=5}$

גם כאן, השמטת קשת בבירור אינה מגדילה את מס' רכיבי הקשירות ולכן משני צידי כל קשת יש שני תחומים <u>שונים</u>. השפה של כל תחום לא מכילה 1 או 2 קשתות (כמו קודם), אך גם לא 3 קשתות כי בגרף זה כל מעגל הוא באורך <u>זוגי</u> (עובר לסירוגין מצד לצד). לכן

$2e \geq 4f \Rightarrow 18 \geq 20 \Rightarrow$ סתירה $\Rightarrow$ <u>גם $K_{3,3}$ לא מישורי.</u>

הערה:

הראינו, בעזרת נוסחת אוילר, שהגרפים K_5 ו-$K_{3,3}$ אינם מישוריים. מסתבר שיש לגרפים אלו תפקיד מרכזי בנושא זה.

משפט: (Kuratowski, 1930)

גרף הוא מישורי אם ורק אם אין לו תת-גרף שהוא עידון של K_5 או $K_{3,3}$.

כאן, עידון (subdivision) של גרף G מתקבל מהפיכת כל קשת של G למסילה פשוטה ע"י הוספת קדקודים. למשל, הנה עידון של הגרף K_4: