תקציר הרצאות בחשבון אינפיניטסימלי 2

בועז צבאן

12 במאי 2019

תוכן עניינים

1 מוסכמות

תקציר זה כולל, עבור חלק מהטענות (בדרך כלל, אלה שאינן מיידיות מההגדרות, או העברת אגפים), את רעיון ההוכחה המרכזי (בצבע כחול), בשורה נפרדת. את פרטי ההוכחות תמצאו בספר של מייזלר או בסיכומי ההרצאות.

האותיות a, b, c, s, x, y, z (עם או בלי אינדקסים) וכן אותיות יוניות ϵ, δ, η מציינות תמיד מספרים ממשיים, והאותיות k, l, m, n, N מציינות תמיד מספרים טבעיים (אלא אם כתוב במפורש אחרת). האותיות $A,\ B,\ C,\ X,\ Y,\ Z$ מציינות תמיד קבוצות של מספרים ממשיים.

טענות שכתובות בלי כמתים ("לכל" או "קיים"), הכוונה שהן נכונות לכל אובייקט שמופיע בטענה.

כמתים מתייחסים תמיד למשתנה שעדיין פנוי. למשל "לכל a ולכל $b < a$, מתקיים $\ldots$ " פירושו "לכל a ולכל b כך ש $b < a$, מתקיים $\ldots$".

2 קירוב מקומי של פונקציה על ידי פולינום

2.1 נגזרות מסדר גבוה

1. **נגזרת מסדר n** מוגדרת באינדוקציה על n:
   (א) $f^{(0)} := f$.
   (ב) $f^{(1)} := f'$.
   (ג) $f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$.
2. דוגמא: נגזרות מסדר $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ של $\sin x$: $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \ldots$ (מחזורי).
3. $(x^k)^{(n)} = \begin{cases} 0 & k < n \\ k! & k = n \\ k(k-1)\cdots(k-(n-1))x^{k-n} & n < k \end{cases}$. בפרט, עבור $f(x) := x^k$ מתקיים $(f)^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ k! & k = n \end{cases}$.
4. אם $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ אז $f^{(k)}(0) = k! a_k$, ולכן $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ לכל $k = 0, 1, \ldots, n$.

2.2 משפט טיילור־מקלורן

1. אם $f(a) = g(a) = 0$ והפונקציות גזירות בסביבה מנוקבת או חד־צדדית של a, אז לכל b בסביבה יש נקודה c בין a ל b המקיימת $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
   $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ומע"מ המוכלל.
2. **משפט:** נניח ש $f^{(n)}(0)$ קיימת. אזי:
   (א) קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + r(x)$ כך ש $\frac{r(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.
   (ב) בהצגה זו, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ לכל k, כלומר:
   $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r(x)$.

   יחידות: נניח שיש שתי הצגות,

   $b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \tilde{r}(x) = f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + r(x)$.

   השאפה $x \to 0$ נותנת $a_0 = b_0$. מחסרים ומחלקים ב x בשביל $a_1 = b_1$, וכולי.
   קיום: $r(x) = f(x) - (\cdots)$. $r^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - (\cdots)^{(k)}(0) = 0$ ($k = 0, \ldots, n$).
   $\lim \frac{r(x)}{x^n} = \cdots = \lim \frac{r^{(n-1)}(x)}{(x^n)^{(n-1)}} = \lim \frac{r^{(n-1)}(x)}{n! x}$ (לופיטל $n-1$ פעמים, מימין לשמאל, בתנאי שהגבול בצד ימין קיים).
   $\lim \frac{r^{(n-1)}(x)}{(x^n)^{(n-1)}} = \lim \frac{r^{(n-1)}(x)}{n! x} = \frac{1}{n!} \lim \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(0) = 0$.

3. **משפט:** נניח ש $f^{(n)}$ קיימת ורציפה ב $[0,b]$, וגזירה ב $(0,b)$. לכל $0<x<b$ יש $0<c_x<x$ כך ש

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{r(x)}.$$

בדומה עבור סביבה שמאלית וסביבה מנוקבת.

יהי x בסביבה. לכל t בסביבה, נגדיר פונקציה $q(t)$:

$$r(x) := f(x)-\left(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$
$$q(t) := f(x)-\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$u(t):=(x-t)^{n+1}$. $q(x)=u(x)=0$, לכן יש $0<c<x$ שעבורו $\frac{q'(c)}{u'(c)}=\frac{q(0)}{\underbrace{x^{n+1}}_{u(0)}}=\frac{r(x)}{x^{n+1}}$.

בחישוב $q'(c)=-\left(f'(c)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k-\frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1}\right)$ הכל מצטמצם טלסקופית פרט למחובר $\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$.

2.3 דוגמאות ויישומים

1. דוגמא: עבור $0<x(<b)$, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, ו $e^c\le e^x$.
עבור $n=5$, $x=1$, $e\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$. השגיאה קטנה מ $\frac{3}{6!}=\frac{1}{240}$, לכן $2.7166\le e\le 2.7207$.
מחשבים לוקחים n מספיק גדול לדיוק הנדרש.
2. $e\notin\mathbb{Q}$.
אם $e=\frac{m}{k}$, נציג $\frac{m}{k}=e=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}$ עם $e,k\le n$ ו $0<c<1$.
אז $n!\frac{e^c}{(n+1)!}$ שלם. $0<n!\frac{e^c}{(n+1)!}\le\frac{e}{n+1}<1$. סתירה.
3. דוגמא שפיתוח טיילור־מקלורן אינו מועיל: $f(x):=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.
באינדוקציה, $f^{(n)}(x)=\begin{cases}p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ כאשר $p_n(t)$ פולינום ממעלה $3n$ ב t. לכן $f(x)=r(x)$.
4. מסקנה: קיימות שתי פונקציות הגזירות אינסוף פעמים ונגזרותיהן שוות ב 0, אך הן **שונות**. למשל, f הנ"ל ו 0.

2.4 קירוב טיילור־מקלורן בנקודה כללית

1. **נוסחת/קירוב טיילור־מקלורן:** הכללת הנ"ל לפיתוח סביב נקודה a כללית:
(א) אם $f^{(n)}(a)$ קיימת, אז $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r(x)$, ומתקיים $\frac{r(x)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$. יתר על כן, הצגה זו יחידה.
(ב) אם $f^{(n)}$ קיימת ורציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), אז לכל $a<x<b$ יש $a<c_x<x$ כך שמתקיים

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{r(x)}.$$

בדומה עבור סביבה שמאלית וסביבה מנוקבת.

$\tilde{f}(h):=f(a+h)$. מפעילים את המשפטים על $\tilde{f}(h)$ (כפונקציה של h). נציב $h:=x-a$.
2. דוגמא: קירוב של $\sin(\frac{\pi}{2}+1)$.

3 מטלת קריאה עצמית: הבסיס המתמטי של "חקירת פונקציות"

3.1 תנאים מספיקים למונוטוניות

1. f פונקציה **עולה ממש / עולה / קבועה / יורדת / יורדת ממש** בתחום אם $f(a) > / \geq / = / \leq / < f(b)$ (בהתאמה) לכל $a < b$ בתחום.

2. תהי f רציפה בקטע סגור וגזירה בקטע הפתוח. f עולה / קבועה / יורדת בקטע $\iff$ $f'(x) \geq / = / \leq 0$ בקטע (בהתאמה).

   ($\Rightarrow$) ממשפט הערך הממוצע.

3. $f(x) := x^3$ עולה ממש אך $f'(0) = 0$.

4. תהי f גזירה בקטע פתוח/סגור. f עולה ממש / יורדת ממש בקטע $\iff$ $f'(x) \geq / \leq 0$ בקטע (בהתאמה) ואינה 0 על תת־קטע שלם.

   עבור f עולה, "לא ממש" = "קבועה על קטע".

3.2 נקודות קיצון

1. תהי f מוגדרת בקטע.

   (א) נקודה c בקטע היא **נקודת מקסימום מקומי** של f אם יש סביבה של c שבה $f(x) \leq f(c)$.

   (ב) נקודה c בקטע היא **נקודת מינימום מקומי** של f אם יש סביבה של c שבה $f(c) \leq f(x)$.

   (ג) **נקודת קיצון (אקסטרמום):** נקודת מקסימום מקומי או מינימום מקומי.

2. משפט פרמה (תזכורת): אם c נקודת אקסטרמום, אז $f'(c) = 0$ או $f'(c)$ לא קיימת.

   המשפט מאתר נקודות **חשודות** כאקסטרמום, ואז אפשר לבדוק כל אחת מהן.

3. דוגמאות:

   (א) 0 אינה אקסטרמום של x^3 למרות שהנגזרת מתאפסת.

   (ב) 0 אינה אקסטרמום של $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ למרות שהנגזרת לא קיימת שם.

   (ג) לפונקציה לא גזירה יכול להיות אקסטרמום: 0 היא מינימום של $|x|$.

4. תהי f רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת.

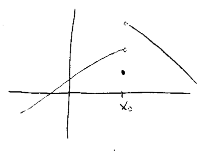
   (א) אם $f' \geq 0$ בסביבה ימנית של c ו $f' \leq 0$ בסביבה שמאלית של c אז c נקודת מינימום.

   (ב) אם $f' \leq 0$ בסביבה ימנית של c ו $f' \geq 0$ בסביבה שמאלית של c אז c נקודת מקסימום.

   (ג) אם $f' \neq 0$ והסימן של f' קבוע בסביבה המנוקבת, אז c אינה נקודת אקסטרמום.

   מהאפיון של פונקציה עולה/יורדת בעזרת נגזרות.

5. הרציפות הכרחית למשפט:



6. תהי f גזירה n פעמים ב a, ומקיימת $f^{(n-1)}(a) = 0 = \cdots = f'(a) = f''(a)$ ו $f^{(n)}(a) \neq 0$.

   (א) אם n זוגי אז a נקודת מקסימום/מינימום אם $f^{(n)}(a) > / < 0$ בהתאמה.

   (ב) אם n איזוגי אז a אינה נקודת אקסטרמום.

   בבית הספר לומדים את המקרה $n = 2$.

   מספיק להוכיח עבור $a = 0$ (לוקחים $\tilde{f}(x) := f(x+a)$ וכו').

   מפיתוח טיילור, $f(x) - f(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x) = (\cdots)x^n$. $\frac{r(x)}{x^n} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, לכן $f^{(n)}(0)$ קובע את הסימן.

3.3 קמירות וקעירות

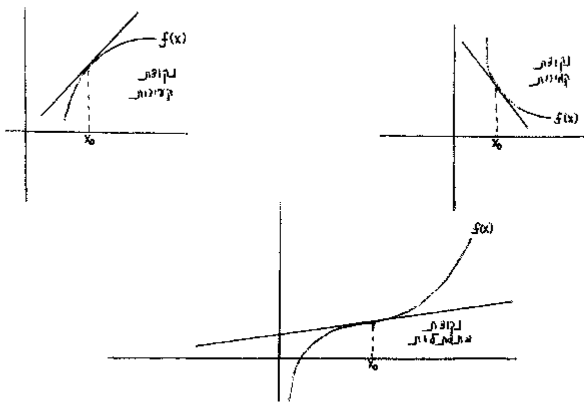
1. תהי f גזירה ב a.

(א) **משוואת המשיק** ב a: $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ (זה קירוב טיילור עם $n=1$).

(ב) f **קעורה** ב a אם המשיק מעל הגרף ($f(x) < g(x)$) בסביבה מנוקבת של a.
"המתמטיקאים הופכים את הקערה על פיה."

(ג) f **קמורה** ב a אם המשיק מתחת לגרף ($g(x) < f(x)$) בסביבה מנוקבת של a.

(ד) a **נקודת פיתול** של f אם המשיק מעל/מתחת בסביבה ימנית של a ומתחת/מעל בסביבה שמאלית של a, בהתאמה.



2. אם $f''(a)$ קיימת, אז: אם $f''(a) < / > 0$ אז הפונקציה קמורה/קעורה ב a.
עבור $a=0$: $f(x) - g(x) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + r(x) = (\cdots)x^2$ ולכן $f''(0)$ קובעת את הסימן.

3. לכן, אם a נקודת פיתול ו $f''(a)$ קיימת אז $f''(a) = 0$. זה נותן נקודות **חשודות** כפיתול.

4. תרגיל: בדומה להוכחת משפט לעיל בעזרת פיתוח טיילור, הכלל את המשפט האחרון:
תהי f גזירה $n \geq 3$ פעמים ב a, ומקיימת $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ו $f^{(n)}(a) \neq 0$.
אזי n איזוגי $\iff$ a נקודת פיתול.

3.4 אסימפטוטות

1. **אסימפטוטה ב ∞:** ישר $y = ax+b$ כך ש $f(x) - (ax+b) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. **אסימפטוטה ב $-\infty$:** ישר $y = ax+b$ כך ש $f(x) - (ax+b) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. מציאת אסימפטוטה ב $\pm\infty$: אם $ax+b$ אסימפטוטה ב $\pm\infty$ אז a $\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}$ $\frac{f(x)}{x}$ ו $f(x) - ax \longrightarrow b$.

4. **אסימפטוטה אנכית:** ישר $x = a$ כך ש $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$.

4 האינטגרל הלא מסויים: הפעולה ההפוכה לנגזרת

4.1 הגדרת האינטגרל הלא מסויים

1. **קטע מוכלל:** קבוצה מהצורה (a,b) כאשר $-\infty \leq a < b \leq \infty$, וכן קטעים עם קצה אחד או שניים סגורים, כאשר הקצוות הסגורים הם מספרים ממשיים.

2. g היא **פונקציה קדומה** של f בקטע מוכלל אם $g'(x) = f(x)$ בקטע.

3. דוגמא: $\sin x$ קדומה של $\cos x$.

4. אם g פונקציה קדומה של f בקטע מוכלל, אז לכל קבוע c, גם $g+c$ פונקציה קדומה של f. ובכיוון ההפוך: כל שתי פונקציות הקדומות לאותה פונקציה בקטע מוכלל הפרשן קבוע.
(הקבוע תלוי בפונקציות הנתונות.)

5. **האינטגרל הלא מסויים** $\int f(x)\,dx$ הוא קבוצת כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ (אם יש כאלה).

6. מהערה קודמת, אפשר לבחור פונקציה קדומה אחת g ולכתוב $\int f(x)\,dx = g(x)+c$, כאשר c מספר ממשי קבוע שרירותי.

7. דוגמא: $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

8. דוגמא: $\int [x]\,dx$ לא קיים בקטע $(-\infty,\infty)$, $[x]$ אינה נגזרת של פונקציה (לנגזרת יש רק אי רציפות מסוג שני).
האינטגרל קיים למשל בקטע $(0,1)$ כיון ששם הפונקציה קבועה.

4.2 אינטגרלים מיידיים

1. אינטגרלים לא מסויימים בסיסיים (קיימים בקטעים בהם הפונקציות מימין גזירות):

(א) $\int 0\,dx = c$.

(ב) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ עבור $\alpha \neq -1$.

(ג) $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$ (זה המקרה $\alpha = -1$).

(ד) $\int e^x\,dx = e^x + c$.

(ה) $\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + c$ עבור a חיובי.

(ו) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$.

(ז) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$.

(ח) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$.

(ט) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$.

(י) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$.

(יא) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\mathrm{arccot} x + c$.

2. **תיקון קבועים מיידי:** אם $\int f(x)\,dx = g(x)+c$, אז $\int f(ax+b)\,dx = \frac{g(ax+b)}{a} + c$.
למשל: $\int \frac{dx}{1+(ax)^2} = \frac{\arctan(ax)}{a} + c$.

3. **כשהמונה הוא נגזרת המכנה:**

(א) $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$.

(ב) $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + c$.

(ג) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$.

$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}}$.

(ד) $\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right| + c$.

4. האינטגרלים $\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \int e^{x^2}\,dx$ קיימים (נראה בהמשך) אך אינם פונקציות אלמנטריות (לא נראה).

5 שיטות אינטגרציה: ארגז כלים

5.1 ליניאריות

1. **פירוק** (ליניאריות, עד כדי קבוע): $\int(\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx + c$.
הקבוע נחוץ כאשר $\alpha = \beta = 0$.

2. דוגמא: $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.
במונה, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

5.2 אינטגרציה בחלקים

1. במקום $\frac{dg}{dx}=f$ נכתוב גם $dg=f\,dx$.
דוגמא: $d\sin x=\cos x\,dx$.

2. עבור פונקציות גזירות u,v מתקיים $\int u\,dv=uv-\int v\,du$.
$(uv)'=u'v+v'u$.
(נראה בהמשך שלכל פונקציה רציפה יש פונקציה קדומה, ובפרט לפונקציות $u'v,v'u$.)

3. לוקחים בתור u פונקציה שרוצים שתיגזר. דוגמאות:
(א) $\int\log x\,dx$: $u:=\log x, dv:=dx$.
(ב) $\int x^2\cos x\,dx$: $u:=x^2, dv:=\cos x\,dx$.
מתקבל בין השאר $\int x\sin x\,dx$, ולוקחים שוב $u:=x$.
(ג) $\int e^x\sin x\,dx$.
לוקחים $u:=\sin x$, אחר כך $u:=\cos x$ ומעבירים אגף.

5.3 הצבה

1. משפט: יהיו I,J קטעים מוכללים.
(א) **הצבה:** אם $u\colon J\to I$ פונקציה גזירה, אז

$$\int\underbrace{f(u(x))u'(x)\,dx}_{f(u)\,du}\underset{t=u(x)}{=}\int f(t)\,dt\,,$$

במובן הבא: אם $\int f(t)dt=g(t)+c$ בקטע I, אז $\int f(u(x))u'(x)\,dx=g(u(x))+c$ בקטע J.
(ב) **הצבה הפוכה:** אם $v\colon J\leftarrow I$ מונוטונית ממש, גזירה, ועל (זה לא מגביל את הכלליות), אז

$$\int f(x)\,dx\underset{x=v(t)}{=}\int\underbrace{f(v(t))v'(t)\,dt}_{f(v)\,dv}\,,$$

במובן הבא: אם $\int f(v(t))v'(t)\,dt=g(t)+c$ בקטע I, אז $\int f(x)\,dx=g(v^{-1}(x))+c$ בקטע J.
גוזרים את אגף ימין ומציבים את הנתונים. למשל עבור (ב): הנגזרת לפי x היא

$$g(v^{-1}(x))'=g'(v^{-1}(x))\cdot\frac{1}{v'(t)}=f(v(v^{-1}(x)))v'(t)\cdot\frac{1}{v'(t)}=f(x).$$

2. דוגמאות:
(א) הצבה: $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$: $u:=\cos x$ ($du=-\sin x\,dx$).
(ב) הצבה הפוכה: $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$: $x=t^2$.
(ג) הצבה טריגונומטרית: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $0<a$, בקטע $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$: $x=a\sin t$.
מתקבל $\int\cos^2t\,dt$ שמחשבים בעזרת $\cos(2t)=2\cos^2t-1$.
מפשטים בעזרת $\sin(2\arcsin\alpha)=2\sin(..)\cos(..)=2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ (בתחום של arcsin, $0\leq\cos(..)$).

5.4 ההצבה של אוילר: האינטגרלים של $1/(a^2\pm x^2)$ ושרשיהם

1. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$ (בלי הגבלת הכלליות, $0<a$).

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$ ($0<a$).
אותו טריק מאפשר להחליף 1 ב a בדוגמאות הבאות.

3. $\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$.
$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x+\sqrt{1+x^2})+c$ בקטע $(0,\infty)$.

ההצבה של אוילר: $t = x+\sqrt{1+x^2}$, $1+x^2=(t-x)^2$. מאפשרת לחלץ את x.

5. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})+c$ בקטע $(0,\infty)$.

אינטגרציה בחלקים, העברת אגף ואינטגרל קודם.

$u := \sqrt{1+x^2}$. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

או: ההצבה של אוילר. משתמשים ש $(\underbrace{t-\frac{1}{t}}_{2x})(\underbrace{t+\frac{1}{t}}_{2\sqrt{1+x^2}}) = t^2-\frac{1}{t^2}$.

6 האינטגרל של פונקציה רציונלית

6.1 רדוקציה לפונקציות רציונליות בסיסיות

1. **פונקציה רציונלית:** מנה של שני פולינומים, $\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x)\neq 0$.
2. אפשר להניח שדרגת q חיובית.
3. על ידי חלוקת המונה והמכנה במקדם המוביל של $q(x)$, אפשר להניח **שהפולינום** $q(x)$ **מתוקן**.
4. אם $p(x), q(x)$ פולינומים זרים, אז יש פולינומים $s(x), t(x)$ כך ש $s(x)p(x)+t(x)q(x)=1$.
על ידי כפל שני האגפים אפשר לקבל במקום 1 כל פולינום שנרצה.
באינדוקציה על סכום המעלות. אם $\deg p \leq \deg q$, נחלק עם שארית $q(x)=a(x)p(x)+r(x)$, אז $p(x), r(x)$ זרים.
5. **מעבר לחזקות פולינומים אי־פריקים במכנה:** אם $q(x)=q_1(x)\cdots q_n(x)$ מכפלת פולינומים זרים, אז

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

לכן מספיק לחשב אינטגרלים כשהמכנה הוא חזקה של פולינום אי־פריק.
$q_1(x)$ זר לשאר המכפלה. נכתוב $p(x)=s(x)q_1(x)+p_1(x)(q_2(x)\cdots q_n(x))$.

6. **הקטנת מעלת המונים:** אם $0<\deg q$ אז $\frac{p(x)}{q(x)^m} = p_0(x)+\frac{p_1(x)}{q(x)}+\frac{p_2(x)}{q(x)^2}+\cdots+\frac{p_m(x)}{q(x)^m}$, $\deg p_i < \deg q$.
מחלקים עם שארית $p(x)/q(x)$, וממשיכים באינדוקציה.
7. **המבנה של פולינום ממשי אי־פריק:** כל פולינום ממשי מתפרק למכפלת פולינומים ממעלה ≥ 2.
במרוכבים, אם z שורש אז גם $\bar{z}$ שורש (כי המקדמים ממשיים).
בפירוק הפולינום לגורמים לינאריים, כל שורש ממשי תורם פולינום ממשי $(x-\alpha)$, וכל שורש לא ממשי z תורם, יחד עם השורש הצמוד, פולינום ממשי $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}$.

6.2 האינטגרל של הפונקציות הרציונליות הבסיסיות

1. נותר לחשב אינטגרלים של פולינומים מהצורות:
(א) $\frac{c}{(x-\alpha)^m}$: הצבה $t=x-\alpha$.
(ב) $\frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^m}$ כאשר $c\neq 0$: הצבה $t=x^2+ax+b$ ושיפצור המונה להיות נגזרת של t. נותר גורם מהצורה הבאה.
(ג) $\frac{c}{(x^2+ax+b)^m}$ כאשר x^2+ax+b איפריק.
2. חישוב האינטגרל השלישי:
(א) רוצים שבמכנה יהיה t^2+1. $x^2+ax+b = (x+\frac{a}{2})^2+\alpha = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}(\ldots)^2+1\right)$.
$\alpha = b-\frac{a^2}{4}$. $a^2-4b<0$, לכן $\alpha>0$ ויש לו שורש שאפשר להכניס פנימה.
(ב) חישוב $\int\frac{dt}{(1+t^2)^m}$: עבור $m=1$ זה $\arctan t+c$. עבור $m>1$: אינטגרציה בחלקים נותנת נוסחת נסיגה, כאשר גוזרים את $\frac{1}{(1+t^2)^m}$ ומסדרים $\frac{t^2}{(1+t^2)^{m+1}}$ על ידי $+1-1$ במונה.

3. אחרי שהוכחנו שקיימת הצגה של כל פונקציה רציונלית כסכום של פונקציות בסיסיות כנ"ל, אפשר למצוא אותן גם על ידי פתרון משוואות לינאריות, כשהנעלמים הם המקדמים של הפונקציות במונה.

4. דוגמא: $\int \frac{x^4-2x^3-x^2-5}{x^3-2x^2-3x-3}\,dx$.

(א) $\frac{x^4-2x^3-x^2-5}{x^3-2x^2-3x-3} = \frac{x^4-2x^3-x^2-5}{(x^2+x+1)(x-3)}$: מציאת השורש 3 על ידי הצבה.

(ב) $\frac{x^4-2x^3-x^2-5}{(x^2+x+1)(x-3)} = x + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x^2+x+1}$: פירוק בעזרת חלוקה עם שארית פעמיים, או משוואות לינאריות.

(ג) $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1\right)$.

7 האינטגרל המסויים: השטח המסומן בין גרף הפונקציה לציר x

7.1 סכומי רימן: קירוב השטח על ידי מלבנים

1. **סכום רימן** המתאים לחלוקה מנוקדת:

(א) **חלוקה** של קטע $[a,b]$: קבוצה סופית $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}\subseteq[a,b]$ כך ש $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$.
(מקבלים מכך הצגה של הקטע $[a,b]$ כאיחוד קטעים שחופפים רק בקצותיהם: $[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_{k-1},x_k]$.)

(ב) **חלוקה מנוקדת** של קטע $[a,b]$: חלוקה כנ"ל, יחד עם בחירה של נקודות $d_1\in[x_0,x_1],\ldots,d_k\in[x_{k-1},x_k]$.

(ג) נסמן את אורכי קטעי החלוקה

$$\Delta_1:=x_1-x_0,\Delta_2:=x_2-x_1,\ldots,\Delta_k:=x_k-x_{k-1}.$$

סכום רימן (של הפונקציה f) המתאים לחלוקה המנוקדת: $\sigma(P):=\sum_{i=1}^k\Delta_i\cdot f(d_i)$.

2. דוגמא: $f(x)=c$ פונקציה קבועה בקטע $[a,b]$. לכל חלוקה מנוקדת P, $\sigma(P)=c(b-a)$.

3. דוגמא: הפונקציה של דיריכלה בקטע $[a,b]$. אם הנקודות $d_1,\ldots,d_k$ רציונליות, אז $\sigma(P)=0$. אם כולן אי־רציונליות, אז $\sigma(P)=b-a$.

7.2 האינטגרל המסויים

1. **הנורמה** של החלוקה: אורך הקטע המקסימלי בחלוקה, $\lambda(P):=\max(\Delta_1,\ldots,\Delta_k)$.

2. סימון: $P_n\longrightarrow 0$ פירושו $\lambda(P_n)\longrightarrow 0$.

3. $\lim_{P\to 0}\sigma(P)=\gamma$: לכל סידרת חלוקות מנוקדות $P_n\longrightarrow 0$ מתקיים $\sigma(P_n)\longrightarrow\gamma$.
שקול: לכל ϵ חיובי יש δ חיובי כך ש $|\sigma(P)-\gamma|\le\epsilon$ לכל חלוקה מנוקדת P עם נורמה קטנה מ δ.

4. **האינטגרל המסויים** של f בקטע $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{P\to 0}\sigma(P)$.
f **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם האינטגרל (כלומר, הגבול) קיים.

5. מסקנות: $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$. הפונקציה של דיריכלה אינה אינטגרבילית באף קטע.

7.3 חסימות הפונקציות האינטגרביליות

1. כל פונקציה אינטגרבילית בקטע היא חסומה שם.
$\gamma-\epsilon<\sigma(P)=\Delta_j\cdot f(d_j)+\sum_{i\neq j}\Delta_i\cdot f(d_i)<\gamma+\epsilon$ ואפשר לשנות את d_j בכל הקטע שלו.

8 האינטגרל העליון והתחתון: סוגרים על השטח מלמעלה ומלמטה

8.1 הסכום התחתון והעליון: קירוב על ידי מלבנים חוסמים וחסומים

1. עבור f חסומה ב $[a,b]$:

$$\alpha := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$\beta := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$\omega := \beta - \alpha$$

2. בדומה, עבור חלוקה (לא בהכרח מנוקדת) $P=\{x_0,\dots,x_k\}$ של קטע $[a,b]$, נגדיר לכל $i=1,\dots,k$:

$$\alpha_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$\beta_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$\omega_i := \beta_i - \alpha_i$$
$$\underline{s}(P) := \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \alpha_i$$
$$\overline{s}(P) := \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \beta_i$$

$\underline{s}(P)$ נקרא **הסכום התחתון** של דרבו ו $\overline{s}(P)$ נקרא **הסכום העליון** של דרבו.

3. $(b-a)\cdot\alpha \le \underline{s}(P) \le \overline{s}(P) \le (b-a)\cdot\beta$.

4. תהי P חלוקה קבועה. תהי R קבוצת כל סכומי רימן $\sigma(P)$, עבור כל הניקודים האפשריים של P. אזי $\underline{s}(P)=\inf R$ ו $\overline{s}(P)=\sup R$.

$\underline{s}(P)\ge\inf R$: $\underline{s}(P)+(b-a)\epsilon=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i(\alpha_i+\epsilon)$.

8.2 עידונים של חלוקות

1. חלוקה Q של $[a,b]$ היא **עידון** של חלוקה P של $[a,b]$ אם $P\subseteq Q$.

2. **למת העידון:** אם $P\subseteq Q$ אז:

$$\overline{s}(Q)\le\overline{s}(P)$$
$$\underline{s}(P)\le\underline{s}(Q)$$
$$\overline{s}(P)-\overline{s}(Q),\underline{s}(Q)-\underline{s}(P)\le|Q\setminus P|\cdot\lambda(P)\cdot\omega.$$

המקרה של הוספת נקודה חדשה אחת (המקרה הכללי נובע) x בקטע $[x_{j-1},x_j]$:

$$\underline{s}(Q)-\underline{s}(P)=(x-x_{j-1})\underbrace{\inf_{x\in[x_{j-1},d]} f(x)}_{\alpha_j\le\cdot\le\beta}+(x_j-x)\underbrace{\inf_{x\in[d,x_j]} f(x)}_{\alpha_j\le\cdot\le\beta}-\Delta_j\alpha_j.$$

3. לכל שתי חלוקות P,Q של אותו קטע, $\underline{s}(P)\le\overline{s}(Q)$.

$\underline{s}(P)\le\underline{s}(P\cup Q)\le\overline{s}(P\cup Q)\le\overline{s}(Q)$.

8.3 האינטגרל העליון והתחתון ואיפיונם כגבולות

1. **האינטגרל התחתון והאינטגרל העליון** של דרבו: $\underline{\int_a^b} f\,dx := \sup\{\underline{s}(P):P\}\le\inf\{\overline{s}(P):P\}=:\overline{\int_a^b} f\,dx$. תמיד קיימים.

2. **משפט** (דרבו): $\underline{\int_a^b} f\,dx = \lim_{P\to 0}\underline{s}(P)$, ו $\overline{\int_a^b} f\,dx = \lim_{P\to 0}\overline{s}(P)$.

נקבע Q כך ש $\overline{s}(Q) \le \overline{\int_a^b} f\,dx + \epsilon$. אם $\lambda(P) \le \epsilon/|Q|$, אז

$$\overline{s}(P) \le \overline{s}(P\cup Q) + |Q\setminus P|\,\lambda(P)\omega \le \overline{s}(Q) + |Q|\,\lambda(P)\omega \le$$
$$\le \overline{\int_a^b} f\,dx + \epsilon + |Q|\,\lambda(P)\omega \le \overline{\int_a^b} f\,dx + (1+\omega)\epsilon$$

3. מסקנה: אפשר לבחור סדרת חלוקות $P_n \longrightarrow 0$ כרצוננו, ויתקיים $\underline{\int_a^b} f\,dx = \lim_{n\to\infty}\underline{s}(P_n)$, ו $\overline{\int_a^b} f\,dx = \lim_{n\to\infty}\overline{s}(P_n)$.

האינטגרל העליון והתחתון קיימים, ומדרבו הגבול קיים ושווה להם.

4. דוגמא: האינטגרל העליון והתחתון של x בקטע $[0,b]$ שניהם $\frac{b^2}{2}$.

נחלק ל n קטעים שווים.

8.4 קריטריונים לאינטגרביליות

1. f אינטגרבילית $\Longleftrightarrow$ חסומה, והאינטגרל העליון והתחתון שווים.

במקרה זה, $\int_a^b f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx$.

($\Rightarrow$) אם $P_n \longrightarrow 0$ חלוקות מנוקדות, אז $\underline{s}(P_n) \le \sigma(P_n) \le \overline{s}(P_n)$, ודרבו.

($\Leftarrow$) אם $P_n \longrightarrow 0$ חלוקות, יש ניקודים שלהן כך ש $\sigma(P_n) - \frac{1}{n} < \underline{s}(P_n) \le \overline{s}(P_n) < \sigma(P_n) + \frac{1}{n}$, ודרבו.

2. דוגמא: $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$.

3. מסקנה: **קריטריון רימן** לאינטגרביליות: התכונות הבאות שקולות:

(א) f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

(ב) f חסומה בקטע, ויש חלוקות P_n שעבורן $\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\Delta_1\omega_1 + \cdots + \Delta_k\omega_k}_{\overline{s}(P_n)-\underline{s}(P_n)}) = 0$.

(ג) f חסומה בקטע, ולכל ϵ חיובי יש חלוקה P שעבורה $\underbrace{\Delta_1\omega_1 + \cdots + \Delta_k\omega_k}_{\overline{s}(P)-\underline{s}(P)} \le \epsilon$.

השוויון $\sup_P \underline{s}(P) = \inf_P \overline{s}(P)$ גורר את הסעיפים האחרים, על ידי מעבר לעידון משותף.

8.5 אינטגרביליות פונקציות רציפות ופונקציות מונוטוניות

1. כל פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרבילית שם.

הפונקציה חסומה שם, ומקבלת מקסימום ומינימום בכל קטע של החלוקה. מרציפות במידה שווה, $\omega_i \underset{\Delta_i\to 0}{\longrightarrow} 0$, ואז $\sum\Delta_i\omega_i \le (\sum\Delta_i)\epsilon = (b-a)\epsilon$.

2. כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית שם.

$\sum\Delta_i\omega_i = \sum\Delta_i(f(x_i)-f(x_{i-1})) \le \lambda(P)\sum(f(x_i)-f(x_{i-1}))$ טלסקופי.

9 כיסויים פתוחים וקבוצות אפסיות

9.1 כיסוי קבוצות על ידי קטעים פתוחים

1. **כיסוי פתוח** של קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$: אוסף של קטעים פתוחים $\{(a_\alpha,b_\alpha) : \alpha\in I\}$ שאיחודם מכיל את A: $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(a_\alpha,b_\alpha)$.

תת־כיסוי סופי: קבוצה סופית של קטעים מהאוסף שמכסה את A.

2. **משפט היינה בורל:** לכל כיסוי פתוח של קטע סגור יש תת־כיסוי סופי.

בפירוט: אם $[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha\in A}(a_\alpha,b_\alpha)$ איחוד של (אינסוף) קטעים פתוחים, אז יש $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in A$ כך ש

$$[a,b] \subseteq (a_{\alpha_1},b_{\alpha_1})\cup\cdots\cup(a_{\alpha_k},b_{\alpha_k}).$$

$b_0 := \sup\{x\in[a,b] : [a,x]\ \text{has a finite subcover}\}$. נכסה את b_0 בקטע אחד, ואת שאר $[a,b_0]$ בכיסוי סופי. נקבל כיסוי של קטע גדול יותר מ $[a,b_0]$.

9.2 קבוצות אפסיות

1. לכל כיסוי פתוח של קבוצה ממשית $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(a_\alpha,b_\alpha)$ יש תת־כיסוי בן מניה, כלומר: יש קבוצת אינדקסים בת מניה $D\subseteq I$ כך ש $A\subseteq \bigcup_{\alpha\in D}(a_\alpha,b_\alpha)$.

   לכל $a\in A$ נקבע קטע $a\in(a_\alpha,b_\alpha)$ ונבחר $p_a,q_a\in\mathbb{Q}$ כך ש $a\in(p_a,q_a)\subseteq(a_\alpha,b_\alpha)$. קבוצת הקטעים הרציונלים היא בת־מניה. נרחיב כל קטע רציונלי שבחרנו לקטע מהכיסוי הנתון.

2. קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ היא **אפסית** (או: בעלת **מידה אפס**) אם לכל ϵ חיובי יש כיסוי בן מניה פתוח $A\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty(a_n,b_n)$ על ידי קטעים שסכום אורכיהם $\sum_{n=1}^\infty(b_n-a_n)\le\epsilon$.

   גם כאן ההגדרה לא תשתנה אם נכתוב "$<\epsilon$" או "$\le c\epsilon$" (כאשר c קבוע שאינו תלוי ב ϵ) במקום "$\le\epsilon$".

3. תרגיל: אם לכל ϵ חיובי יש כיסוי סופי כבהגדרה, אז לכל ϵ חיובי יש גם כיסוי (בן מניה) אינסופי כבהגדרה.

4. כל תת־קבוצה של קבוצה אפסית היא אפסית.

   נשתמש באותו כיסוי פתוח.

5. כל קבוצה בת־מניה היא אפסית.

   אם צריך, נוסיף לה נקודות כך שתהיה אינסופית. נכסה את הנקודה ה־n בקבוצה בקטע מאורך $\frac{\epsilon}{2^n}$.

6. תהי $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חד־חד ערכית ועל. אזי, עבור טורים חיוביים, מתקיים

$$\sum_{i=1}^\infty\underbrace{\sum_{j=1}^\infty a_{ij}}_{b_i}=\sum_{n=1}^\infty a_{\varphi(n)},$$

   במובן הבא: הטור הימני מתכנס אם ורק אם כל הטורים משמאל מתכנסים, ואז הסכומים שווים.

7. כל איחוד בן מניה של קבוצות אפסיות הוא קבוצה אפסית.

   (אם זה איחוד סופי $A_1\cup\cdots\cup A_m$, נסמן $A_k:=\emptyset$ עבור $k>m$.)

   לכל i ניקח כיסוי פתוח $A_i\subseteq\bigcup_j(a_{ij},b_{ij})$ על ידי קטעים שסכום אורכיהם $\le\epsilon/2^i$.

   תהי $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חד־חד ערכית ועל.

   $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty\bigcup_{j=1}^\infty(a_{ij},b_{ij})=\bigcup_{n=1}^\infty(a_{\varphi(n)},b_{\varphi(n)})$, ו

$$\sum_{n=1}^\infty(b_{\varphi(n)}-a_{\varphi(n)})=\sum_i\sum_j(b_{ij}-a_{ij})\le\sum_i\frac{\epsilon}{2^i}=\epsilon.$$

8. קטע $[a,b]$ אינו קבוצה אפסית.

   יהי נתון כיסוי שסכום ארכי קטעיו קטנים מאורך הקטע $[a,b]$. ניקח תת־כיסוי סופי $[a,b]\subseteq\bigcup_{n\in F}(a_n,b_n)$.

   כל עוד אפשר, ניקח $a\in(a_{n_1},b_{n_1})$, $b_{n_1}\in(a_{n_2},b_{n_2})$, וכולי. $b_{n_1}<b_{n_2}<\cdots$, לכן האינדקסים n_i שונים ולכן זה נעצר: יש k עם $b<b_{n_k}$.

   $b-a=(b_{n_1}-a)+(b_{n_2}-b_{n_1})+\cdots+(b-b_{n_{k-1}})\le(b_{n_1}-a_{n_1})+(b_{n_2}-a_{n_2})+\cdots+(b_{n_k}-a_{n_k})\le\epsilon<b-a$.

10 [קריאה עצמית] קבוצת קנטור: קבוצות אפסיות שאינן בנות מניה

10.1 בניית קבוצת קנטור על ידי הסרת שלישי קטעים

1. למה (קנטור): אם $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq\cdots$ סידרת קטעים סגורים יורדת שאורכיהם שואפים לאפס ($b_n-a_n\longrightarrow0$), אז בחיתוכם $\bigcap_{n=1}^\infty[a_n,b_n]$ יש נקודה אחת בדיוק.

   הסידרה (b_n) יורדת וחסומה מלרע (על ידי a_1), לכן מתכנסת לנקודה x. כיון ש $b_n-a_n\longrightarrow0$, גם $a_n\longrightarrow x$.

   כיון שהסידרה (b_n) יורדת והסידרה (a_n) עולה, $\{a_n:n\in\mathbb{N}\}\le x\le\{b_n:n\in\mathbb{N}\}$ ולכן x נמצאת בכל הקטעים.

   לכל נקודה נוספת $a_n\le y\le b_n$ לכל n, נקבל מסנדביץ' $y=x$.

2. יהיו $C_0:=[0,1]$, $C_1:=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ (הקבוצה המתקבלת מ C_2 על ידי הורדת השליש האמצעי של הקטע).

   עבור $n=1,2,3,\ldots$ כללי, C_n היא איחוד של 2^n קטעים סגורים זרים, ונגדיר את C_{n+1} להיות הקבוצה המתקבלת מ C_n על ידי הסרת השליש האמצעי מכל קטע.

   המחשה (מויקיפדיה) של הקבוצות $C_0,C_1,\ldots,C_7$:

קבוצת קנטור היא הקבוצה $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. נקודותיה הן הנקודות שלא הוסרו בשום שלב של הבניה.

10.2 התכונות המפתיעות של קבוצת קנטור

1. קבוצת קנטור היא אינסופית.

   כל קצה של קטע שמופיע בבניה, נשאר גם בכל השלבים הבאים. למשל, $0, 1 \in C$.

2. אם לכל ϵ חיובי יש כיסוי סופי של A על ידי קטעים פתוחים שסכום אורכיהם קטן מ ϵ, אז הקבוצה A אפסית.

   אפשר להוסיף עוד קטעים שרירותיים לכיסוי, שאורכיהם $\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{8}, \ldots$ ולקבל כיסוי אינסופי שסכום אורכי קטעיו קטן מ 2ϵ.

3. הגדרת קבוצה אפסית לא תשתנה אם ניקח כיסויים על ידי קטעים סגורים במקום קטעים פתוחים.

   כל קטע סגור $[x, y]$ בכיסוי אפשר להחליף בקטע פתוח שמכיל אותו וארוך פי שניים. סכום אורכי הקטעים הפתוחים יהיה 2ϵ.

4. קבוצת קנטור היא אפסית.

   לכל n, $C \subseteq C_n$ והקבוצה C_n היא איחוד של 2^n קטעים (סגורים) מאורך $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ולכן סכום אורכיהם הוא $2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   יהי $0 < \epsilon$. ניקח n עם $\left(\frac{2}{3}\right)^n \le \epsilon$.

5. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : \forall n,\ a_n \in \{0,1\}\}$, קבוצת כל הסדרות של אפסים ואחדים.

6. $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0}$.

7. $|C| = 2^{\aleph_0}$. בפרט, קבוצת קנטור אינה בת מניה!

   נראה שיש פונקציה חד־חד ערכית $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$.

   ניתן לשני הקטעים בקבוצה C_1 את השמות I_0, I_1.

   בקבוצה C_2 יש שני תת־קטעים לכל קטע בקבוצה C_1. לשני תת־הקטעים של I_0 נקרא I_{00}, I_{01}. לשני תת־הקטעים של I_1 נקרא I_{10}, I_{11}.

   נמשיך באופן דומה לכל n טבעי: בקבוצה C_n יש 2^n קטעים זרים, המסומנים $I_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ כאשר $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$. לכל קטע כזה, יש בקבוצה C_{n+1} שני תת־קטעים זרים, שיסומנו $I_{a_1 a_2 \ldots a_n, 0}, I_{a_1 a_2 \ldots a_n, 1}$.

   בהנתן סידרה $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, נגדיר את $f((a_1, a_2, a_3, \ldots))$ להיות, לפי למת קנטור, המספר הממשי היחיד בחיתוך הקטעים הסגורים

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

   הפונקציה f חד־חד ערכית: אם $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \neq (b_1, b_2, b_3, \ldots)$, יהי n המספר הטבעי המינימלי כך ש $a_n \neq b_n$. מהגדרת הפונקציה f,

   $$f((a_1, a_2, a_3, \ldots)) \in I_{a_1 \ldots a_n},\ f((b_1, b_2, b_3, \ldots)) \in I_{b_1 \ldots b_n}$$

   והקטעים $I_{a_1 \ldots a_n}, I_{b_1 \ldots b_n}$ זרים. לכן $f((a_1, a_2, a_3, \ldots)) \neq f((b_1, b_2, b_3, \ldots))$.

8. הפונקציה f שהוגדרה בהוכחה האחרונה היא גם על.

   נשתמש בסימוני ההוכחה האחרונה. תהי $x \in C$.

   יש קטע יחיד I_{a_1} בקבוצה C_1 כך ש $x \in I_{a_1}$.

   לקטע זה יש תת־קטע יחיד $I_{a_1 a_2}$ בקבוצה C_2 כך ש $x \in I_{a_1 a_2}$, וכן הלאה, באינדוקציה:

   בשלב n יש קטע יחיד $I_{a_1 \ldots a_n}$ בקבוצה C_n כך ש $x \in I_{a_1 \ldots a_n}$, ואז בקבוצה C_{n+1} יש לקטע זה תת־קטע יחיד $I_{a_1 \ldots a_n a_{n+1}}$ שאליו שייכת הנקודה x.

   קיבלנו סידרה $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ומתקיים $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a_1 \ldots a_n} = \{f((a_1, a_2, a_3, \ldots))\}$, ובהכרח $x = f((a_1, a_2, a_3, \ldots))$.

11 משפט לבג: איפיון מלא של הפונקציות האינטגרביליות

11.1 תנאי מספיק לשויון פונקציות כמעט בכל הקטע

1. תכונה מתקיימת **כמעט בכל הקטע** $[a,b]$ אם קבוצת הנקודות בקטע שאין להן התכונה היא אפסית.
2. תהי $f \geq 0$ בקטע $[a,b]$. אם $\int_a^b f\,dx = 0$, אז לכל c חיובי, $f(x) \leq c$ כמעט בכל הקטע.
$A := \{x \in [a,b] : f(x) > c\}$. עבור חלוקה P: $A \subseteq \bigcup_{i \in I}[x_{i-1}, x_i]$, כאשר $I := \{i : A \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \emptyset\}$.
מתקיים $\sum_{i \in I} \Delta_i \cdot c \leq \overline{s}(P)$.
3. אם $f \geq 0$ בקטע $[a,b]$ ו $\int_a^b f\,dx = 0$, אז $f = 0$ כמעט בכל הקטע.
$\{x \in [a,b] : f(x) > 0\} = \bigcup_n \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$.
4. עבור f, g אינטגרביליות ב $[a,b]$: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$.
מלינאריות סכומי רימן.
5. אם $f \leq g$ בקטע $[a,b]$ ומקיימות $\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$ אז $f = g$ כמעט בכל הקטע.
$\int_a^b \underbrace{(g-f)}_{0\leq}\,dx = 0$.

11.2 משפט לבג

1. **משפט לבג**, חלק ראשון: אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f רציפה כמעט בכל הקטע.
נקבע חלוקות הולכות ומתעדנות $P_n \longrightarrow 0$. נגדיר

$$g_n(x) := \begin{cases} \alpha_i & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f(x_i) & x = x_i \end{cases}$$
$$h_n(x) := \begin{cases} \beta_i & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f(x_i) & x = x_i \end{cases}$$

פונקציות המדרגות המתאימות לחלוקה P_n.
לכל נקודה x מתקיים $h_n(x) \swarrow h(x) \geq f(x) \geq g(x) \nearrow g_n(x)$.

$$\int_a^b f\,dx \longleftarrow \underline{s}_f(P_n) = \underline{s}_{g_n}(P_n) \leq \underline{s}_g(P_n) \leq \overline{s}_g(P_n) \leq \overline{s}_f(P_n) \longrightarrow \int_a^b f\,dx\,.$$

לכן $\int f = \int g$, ובדומה $\int f = \int h$. ולכן $g = f = h$ כמעט בכל הקטע.
עבור $x \notin \bigcup_n P_n \cup [h \neq f] \cup [g \neq f]$, נקבע n מספיק גדול כך ש $\alpha_i = g_n(x) \approx f(x) \approx h_n(x) = \beta_i$.
אם $x \approx y$ אז הם באותו קטע בחלוקה P_n, ו $\alpha_i \leq f(y), f(x) \leq \beta_i$, ולכן $|f(y) - f(x)| \leq \beta_i - \alpha_i$ קטן.
2. **משפט לבג**, חלק שני: תהי f חסומה בקטע $[a,b]$. אם f רציפה כמעט בכל הקטע, אז היא אינטגרבילית שם.
$A =:$ נקודות אי־הרציפות של f. יהי $0 < \epsilon$.
לכל $c \in [a,b] \setminus A$ נקבע קטע $[c - \delta_c, c + \delta_c]$ שבו $|f(x) - f(c)| \leq \epsilon$.
נקבע כיסוי פתוח $A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)$ כך שסכום אורכי הקטעים $\leq \epsilon$.
$[a,b] \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n) \cup \bigcup_c (c - \delta_c, c + \delta_c)$, ולכן יש תת־כיסוי על ידי מספר קטעים סופי.
ניקח חלוקה P כבהוכחה שקטע אינו קבוצה אפסית. לכל קטע בחלוקה נקבע קטע יחידי $[a_n, b_n]$ או $[c - \delta_c, c + \delta_c]$ שמכיל אותו.
$F =:$ האינדקסים i כך שעבור (x_{i-1}, x_i) בחרנו מבין הקטעים $[a_n, b_n]$.
$\sum_i \Delta_i \omega_i \leq \sum_{i \in F} \Delta_i \omega + \sum_{i \notin F} \Delta_i \cdot 2\epsilon \leq \omega\epsilon + 2\epsilon(b-a) = \text{constant} \cdot \epsilon$.

11.3 דוגמאות ומסקנות

1. דוגמאות: כל פונקציה חסומה עם מספר סופי, או בן מניה, של נקודות אי־רציפות בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.
2. דוגמא: $\sin\frac{1}{x}$ עם הגדרה שרירותית באפס היא פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ שאינה רציפה במידה שווה בקטע.
3. דוגמא: פונקציית הפופקורן אינטגרבילית: חסומה ורציפה בכל האירציונלים.
4. אם f,g אינטגרביליות ושוות על קבוצה צפופה בקטע, אז $\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$.
   בסכומי רימן, נבחר לנקד בנקודות בהן $f=g$.
5. דוגמא: $\int_a^b \text{pop}\,dx = 0$.
6. הפונקציה של דיריכלה (עם 0 על האירציונלים) מראה שייתכן $f=0$ כמעט בכל הקטע, ולא נובע ש $\int_a^b f\,dx = 0$. זה יכול לקרות רק כשהאינטגרל לא קיים.
7. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו $f=g$ פרט למספר סופי של נקודות, אז $\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$.
   g חסומה ורציפה כמעט בכל הקטע.

12 תכונות בסיסיות של האינטגרל המסויים

12.1 חשבון אינטגרלים מסויימים

טענות 1־3 להלן נובעות ממשפט לבג.

1. אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז גם המכפלה $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע.
2. אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ו $|g(x)|\geq c>0$ בקטע, אז המנה $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית בקטע.
3. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית בכל תת־קטע $[c,d]\subseteq[a,b]$.
4. אם $a<c<b$ ו f אינטגרבילית בשני התת־קטעים $[a,c],[c,b]$, אז $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.
   מלבג, הפונקציה אינטגרבילית. ניקח חלוקות מנוקדות $P_n,Q_n\to 0$ של הקטעים בהתאמה. אז $P_n\cup Q_n\to 0$. כאן, $\sigma(P_n\cup Q_n)=\sigma(P_n)+\sigma(Q_n)$.
5. דוגמא: $\int_1^3[x]\,dx = \int_1^2[x]\,dx+\int_2^3[x]\,dx = \int_1^2 1\,dx+\int_2^3 2\,dx = 1+2=3$.
   $[x]$ קבועה בכל קטע כנ"ל פרט למספר סופי של נקודות (קצה הקטע).
6. $\int_a^a f\,dx := 0$. עבור $a<b$, $\int_b^a f\,dx := -\int_a^b f\,dx$.
7. לכל a,b,c (לאו דווקא מסודרים או שונים) כך שהפונקציה אינטגרבילית בקטעים, $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.
   בדיקת כל המקרים.

12.2 אי־שיוויונים ומשפט הערך הממוצע האינטגרלי

1. אם $f\leq g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.
   $\sigma_f(P_n)\leq\sigma_g(P_n)$.
2. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע, ומתקיים $\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$.
   אינטגרביליות מלבג. אי־שיוויון מסעיף קודם.
3. דוגמא: אי־שיוויון המשולש. $f=a$ בקטע $[0,1)$ ו $f=b$ בקטע $[1,2]$. נקבל מהנ"ל $|a+b|\leq|a|+|b|$.
4. ייתכן ש $|f|$ אינטגרבילית בעוד ש f אינה אינטגרבילית: דיריכלה עם ±1 במקום $0,1$.
5. **משפט הערך הממוצע האינטגרלי:** יהיו f רציפה בקטע $[a,b]$, $g\geq 0$ בקטע (או $g\leq 0$ בקטע) ואינטגרבילית. אזי יש c בקטע כך ש: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.
   $\alpha g(x)\leq f(x)g(x)\leq\beta g(x)$. מפעילים $\int_a^b$. אם $\int_a^b g(x)\,dx=0$ יהיה "סנדביץ'". ואם לא, מחלקים ב $\int_a^b g(x)\,dx$, ומשתמשים במשפט ערך הביניים לגבי f.
6. במשפט הערך הממוצע האינטגרלי, עבור $g(x)=1$ נקבל $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$, יש נקודה שבה ערך הפונקציה שווה לתוחלת (ממוצע) שלה בקטע.

13 המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי

13.1 האינטגרל המסויים מגדיר פונקציה קדומה

1. אם f אינטגרבילית בקטע, אז $\varphi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ רציפה שם.

רציפות מימין: $\int_a^{x+h} = \int_a^x + \int_x^{x+h}$, ו $\left|\int_x^{x+h} f(x)\,dx\right| \le \int_x^{x+h} |f(x)|\,dx \le \beta h \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

ברציפות משמאל יש להפוך ל $\int_{x+h}^x$.

2. **המשפט היסודי:** תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ותהי $\varphi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. אזי $\varphi'(x) = f(x)$ בכל נקודות הרציפות של f.

$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$.

נגזרת מימין: עבור $h > 0$ קטן, $f(x)-\epsilon = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(x)-\epsilon)dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(x)+\epsilon)dt = f(x)+\epsilon$.

בנגזרת משמאל יש להפוך ל $\int_{x+h}^x$.

13.2 חישוב האינטגרל המסויים בעזרת הפונקציה הקדומה

1. **הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי** (ניוטון־לייבניץ)**:** אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ו φ פונקציה קדומה של f, אז $\int_a^b f\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$.

הטענה נכונה לפונקציה הקדומה $\varphi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, וההבדל בינה לכל פונקציה קדומה אחרת הוא קבוע.

2. סימון: $\varphi(x)\mid_a^b := \varphi(b) - \varphi(a)$.

3. דוגמא: $\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\mid_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

4. הכללה: אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו φ רציפה בקטע, ופרט למספר סופי של נקודות, φ גזירה בפנים הקטע ומקיימת $\varphi'(x) = f(x)$, אז $\int_a^b f\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$.

ניקח חלוקות $P_n \longrightarrow 0$, ונוסיף להן את הנקודות הבעייתיות. בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ של P_n יש ממשפט הערך הממוצע נקודה d_i כך ש $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \Delta_i f(d_i)$.

$\int_a^b f(x)\,dx \longleftarrow \sigma(P_n) = \sum_{i=1}^k \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi(b) - \varphi(a)$.

5. דוגמא: הפונקציה הקדומה $\varphi(x) := \begin{cases} x & 1 \le x < 2 \\ 2x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ עבור $[x]$ (פרט לנקודה 2), שאינה רציפה בקטע $[1,3]$, לא עובדת בנוסחה היסודית לחישוב $\int_1^3 [x]\,dx$.

אבל הפונקציה הקדומה (פרט לנקודה 2) $\varphi(x) := \begin{cases} x+2 & 1 \le x < 2 \\ 2x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ רציפה ועובדת. מתקיימות הנחות המשפט המוכלל אך לא זה שלפניו.

14 שיטות אינטגרציה מסויימת

14.1 שיטות הנובעות מהנוסחה היסודית

1. פונקציה **גזירה ברציפות** בתחום: פונקציה שהנגזרת שלה קיימת ורציפה בתחום.

2. **חלקים:** עבור פונקציות גזירות ברציפות u, v בקטע סגור $[a,b]$: $\int_a^b u\,dv = uv\mid_a^b - \int_a^b v\,du$.

3. **הצבה:** יהיו $u\colon [a,b] \to im(u)$ פונקציה גזירה, ו f רציפה בקטע $im(u)$. אזי

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx \underset{t:=u(x)}{=} \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

(האינטגרלים קיימים ושווים).

אם $\varphi'(t) = f(t)$, אז $\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt = \varphi\mid_{u(a)}^{u(b)}$. גם $\varphi(u(x))' = f(u(x))u'(x)$ ולכן $\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \varphi(u(x))\mid_b^a$.

4. כאן אין הפרדה בין הצבה להצבה הפוכה, כי אין צורך לחזור למשתנה המקורי.

5. דוגמא: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ עבור $0 < a$. (זהו שטח של רבע מעגל)

$x := a\sin t$ בתחום $[0, \frac{\pi}{2}]$.

14.2 משפט ההצבה עבור פונקציה אינטגרבילית והצבה מונוטונית

1. תהי f רציפה במידה שווה בתחום A. אם $\delta_n \longrightarrow 0$, אז

$$\epsilon_n := \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in A, |x-y|\le\delta_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

כלומר, הסידרה (ϵ_n) מוגדרת לבסוף וגבולה 0.

2. **הצבה מונוטונית:** יהיו f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו $u\colon [a,b]\to im(u)$ גזירה ברציפות ומונוטונית ממש.
אזי $\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt$.

עבור u עולה: יהיו $0 \longrightarrow P_n$ חלוקות מנוקדות של $[a,b]$. נקבע n. יהיו $a=t_0<\cdots<t_k=b$ קצוות הקטעים, ו $d_1,\dots,d_k$ הנקודות בקטעים.

הפעלת u נותנת חלוקה מנוקדת Q_n של $[u(a),u(b)]$.

$$\sigma(P_n) = \sum f(u(d_i))u'(d_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\sigma(Q_n) = \sum f(u(d_i))(u(t_i)-u(t_{i-1})) = \sum f(u(d_i))u'(c_i)(t_i-t_{i-1})$$

ממשפט הערך הממוצע, עבור נקודות מתאימות $c_i\in[t_{i-1},t_i]$.

g רציפה במידה שווה, לכן $0 \longrightarrow Q_n$ ולכן $\sigma(Q_n) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$.

מאי־שיוויון המשולש, $|\sigma(P_n)-\sigma(Q_n)| = |\sum f(u(d_i))(u'(d_i)-u'(c_i))(t_i-t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^k \gamma\epsilon_n(t_i-t_{i-1}) = \gamma\epsilon_n(\beta-\alpha) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

עבור u יורדת: הפעלת u נותנת חלוקה מנוקדת Q_n של $[\beta,\alpha]$: $\beta=u(t_k)<\cdots<u(t_0)=\alpha$, ונקבל

$$\sigma(Q_n) = \sum_{i=0}^{k} f\underbrace{(u(d_{k-i}))(u(t_{k-i})-u(t_{k-(i-1)}))}_{h(k-i)} = \sum_{i=0}^{k}\underbrace{f(u(d_i))(u(t_i)-u(t_{i-1}))}_{h(i)} = \sum f(u(d_i))u'(c_i)(t_i-t_{i-1})$$

וממשיכים כבמקרה הקודם.

15 אינטגרלים לא אמיתיים - סוג ראשון

15.1 האינטגרל בקרן ימנית

1. יהי a קבוע. תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ (לכל b שגדול מ a). נסמן $\varphi(b) := \int_a^b f\,dx$.

$$\int_a^\infty f\,dx := \lim_{b\to\infty}\varphi(b) = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dx\,.$$

f **אינטגרבילית בקרן** $[a,\infty)$ אם ההנחות מתקיימות והגבול קיים (במובן הצר).

2. דוגמאות:
(א) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$.
(ב) $\int_0^\infty \sin x\,dx$ אינו קיים.
(ג) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases}\infty & \alpha\le 1\\ \frac{1}{\alpha-1} & 1<\alpha\end{cases}$.

3. **מוסכמה:** מעתה, בכל פעם שנכתוב $\int_a^\infty f\,dx$, נניח שהפונקציה f אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ לכל $a<b$.

4. ליניאריות: אם f,g אינטגרביליות ב $[a,\infty)$, אז לכל שני מספרים α,β מתקיים

$$\int_a^\infty(\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha\int_a^\infty f\,dx + \beta\int_a^\infty g\,dx\,.$$

5. לכל $a<c$ מתקיים $\int_a^\infty f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^\infty f\,dx$, במובן שאם אחד האינטגרלים הלא אמיתיים קיים, גם השני קיים ומתקיים השויון.
6. מסקנה: קיום $\int_a^\infty f\,dx$ תלוי רק בזנב, כלומר התכונות הבאות שקולות:
   (א) $\int_a^\infty f\,dx$ קיים.
   (ב) $\int_c^\infty f\,dx$ קיים לאיזשהו $a \le c$.
   (ג) $\int_c^\infty f\,dx$ קיים לכל $a \le c$.

15.2 האינטגרל בקרן שמאלית ובישר כולו

1. יהי a קבוע. תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[b,a]$ (לכל b שקטן מ a).
$$\int_{-\infty}^a f\,dx := \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f\,dx\ .$$
f **אינטגרבילית בקרן** $(-\infty,a]$ אם ההנחות מתקיימות והגבול קיים (במובן הצר).
2. המשפטים האנלוגיים למשפטים עבור $[a,\infty)$ תקפים עבור $(-\infty,a]$ עם הוכחות דומות (או מעבר מ $f(x)$ ל $f(-x)$).
3. תהי f אינטגרבילית בכל קטע סגור.
$$\int_{-\infty}^\infty f\,dx := \int_{-\infty}^0 f\,dx + \int_0^\infty f\,dx\ .$$
f **אינטגרבילית ב** $(-\infty,\infty)$ אם ההנחות מתקיימות והגבול קיים (במובן הצר).
4. לכל a, $\int_{-\infty}^\infty f\,dx = \int_{-\infty}^a f\,dx + \int_a^\infty f\,dx$.
5. ייתכן $\int_{-\infty}^\infty f\,dx \neq \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b f\,dx$. למשל $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn}(x)\,dx$ לא קיים, למרות שהגבול מימין קיים.
6. תרגיל:
   (א) אם $\int_{-\infty}^\infty f\,dx$ קיים, אז הגבול מימין קיים ושווה לו.
   (ב) $\int_{-\infty}^\infty f\,dx = c \iff$ לכל שתי פונקציות $g_1(b), g_2(b) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ מתקיים $\lim_{b\to\infty}\int_{-g_1(b)}^{g_2(b)} f\,dx = c$.

16 הקשר של אינטגרל לא אמיתי לטורים

16.1 מבחנים אנלוגיים למבחני טורים חיוביים

1. עבור פונקציה $f \ge 0$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ לכל b שגדול מ a, $0 \le \int_a^\infty f\,dx \le \infty$ קיים במובן הרחב.
הפונקציה $\varphi(b) := \int_a^b f\,dx$ עולה ולכן מתכנסת במובן הרחב.
2. **מבחן ההשוואה:** יהיו $0 \le f \le g$ בקרן $[a,\infty)$. אזי $\int_a^\infty f\,dx \le \int_a^\infty g\,dx$. בפרט:
   (א) אם $\int_a^\infty g\,dx < \infty$, אז $\int_a^\infty f\,dx < \infty$.
   (ב) אם $\int_a^\infty f\,dx = \infty$, אז $\int_a^\infty g\,dx = \infty$.
בשביל (א) ו(ב) מספיק $0 \le f(x) \le cg(x)$ לאיזשהו קבוע c ולכל $a \le \tilde{a} \le x$.
3. דוגמא: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty$, מהשוואה ל $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$.
אנקדוטה ללא הוכחה: ידוע $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
4. **מבחן ההשוואה הגבולי:** יהיו $f,g \ge 0$ בקרן $[a,\infty)$. אם הגבול $c := \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ו $0<c<\infty$, אז האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)\,dx, \int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים ומתבדרים יחד .
5. **הקריטריון של קושי:** תהי f אינטגרבילית ב $[a,b]$ לכל b שגדול מ a.
$\int_a^\infty f\,dx$ קיים $\iff$ לכל ϵ חיובי יש קבוע c כך שמתקיים $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\,dx\right| \le \epsilon$ לכל $c \le b_1 < b_2$.
$(\Longrightarrow)$ $\varphi(b) := \int_a^b f\,dx$. לכל סידרה $c \le c_n \longrightarrow \infty$, $\varphi(c_n)$ סידרת קושי ולכן מתכנסת.
נובע שכל הסדרות האלה מתכנסות לאותו גבול.

6. $\int_a^\infty f\,dx$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\infty |f|\,dx<\infty$.
אם רק הראשון מתכנס, אומרים שהוא **מתכנס בתנאי**.

7. אינטגרל המתכנס בהחלט, מתכנס.
מקושי ואי־שיוויון המשולש האינטגרלי $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\,dx\right|\le\int_{b_1}^{b_2}|f|\,dx$.

8. דוגמאות:
   (א) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ מתכנס בהחלט ($|\sin x|\le 1$) ולכן מתכנס.
   (ב) אם לבסוף $|f(x)|\le\frac{c}{x^\alpha}$ לאיזשהו $1<\alpha$ אז $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס (בהחלט).
   (ג) אם לבסוף $f(x)\ge\frac{c}{x^\alpha}$ ($0<c$) לאיזשהו $\alpha\le 1$ אז $\int_a^\infty f(x)\,dx$ לא קיים (במובן הצר).

9. **מבחן דיריכלה:** נניח שבקרן $[a,\infty)$ מתקיים:
   (א) f רציפה, והפונקציה $\varphi(b):=\int_a^b f\,dx$ חסומה.
   (ב) $g(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ מונוטונית וגזירה ברציפות.

   אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס.
   אינטגרציה בחלקים. $v:=\int_a^x f(t)\,dt$ חסומה.
   $\int_a^b g(x)\underbrace{f(x)\,dx}_{dv}=g(x)v(x)\mid_a^b-\int_a^b v(x)g'(x)\,dx$.
   $g(b)v(b)\underset{b\to\infty}{\longrightarrow}0$.
   $|v(x)g'(x)|\le c(-g'(x))$, ו $\int_a^b g'(x)\,dx=g(b)-g(a)\underset{b\to\infty}{\longrightarrow}-g(a)$.

10. המשפט נכון גם כאשר הפונקציות f,g אינטגרביליות בלבד. אבל ההוכחה יותר מורכבת ומושארת לקריאה עצמית למעוניינים.

11. דוגמא: $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx$ מתכנס ($g(x):=\frac{1}{x}$).
אינו מתכנס בהחלט: $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\sin^2 x\le|\sin x|$, ו $\int_1^\infty\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ מתכנס מדיריכלה.

12. במבחן דיריכלה, לא ניתן לוותר על המונוטוניות: $\varphi(b):=\int_1^b\sin x\,dx$ חסום, והפונקציה $\frac{\sin x}{x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, ועדיין כנ"ל $\int_1^\infty\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ מתבדר.

16.2 מבחן האינטגרל להתכנסות טור מונוטוני

1. הקדמה למבחן האינטגרל: התכנסות תלויה בזנב, לכן מספיק לבדוק התכנסות אינטגרלים מהצורה $\int_k^\infty$, k טבעי.

2. **מבחן האינטגרל:** תהי f חיובית ויורדת. אזי:
$$\sum_{n=k+1}^{\infty}f(n)\le\int_k^\infty f\,dx\le\sum_{n=k}^{\infty}f(n)\,.$$

בפרט, הטור והאינטגרל מתכנסים ומתבדרים יחד.
לכל $k<m$,
$$\sum_{n=k+1}^{m}f(n)=\underline{S}(\{k,k+1,\dots,m\})\le\int_k^m f\,dx\le\bar{S}(\{k,k+1,\dots,m\})=\sum_{n=k}^{m-1}f(n).$$
$\lim_{m\to\infty}\int_k^m f\,dx=\int_k^\infty f(x)\,dx$ כי האינטגרל מימין קיים במובן הרחב.

3. אפשר להשתמש במבחן גם לאומדן סכומי טורים: $1.25=1+\frac{1}{4}\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\sum_{n=3}^\infty\frac{1}{n^2}\le 1.25+\int_2^\infty\frac{dx}{x^2}=1.25+-\frac{1}{x}\mid_2^\infty=1.75$.
אם ניקח יותר מחוברים נקבל אומדן יותר טוב של $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$. (ידוע שהסכום הוא $\frac{\pi^2}{6}=1.6449\dots$).

4. דוגמא: מקבלים, ללא צורך בהוכחות ייחודיות לפי מקרים ובמבחן העיבוי:
$1<\alpha\iff\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}<\infty\iff\sum\frac{1}{n^\alpha}<\infty$.

5. לא כל התכונות של טורים חיוביים עוברות כלשונן לאינטגרלים חיוביים: ייתכן ש $f \geq 0$ ורציפה, $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$, ועדיין $f(x) \underset{x\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

ניקח פונקציה שהגרף שלה כולא תחתיו את המשולשים שבסיסם $[n, n+\frac{1}{n^2}]$ וגובהם 1, לכל n (ובשאר $f=0$).

אפשר גם לסדר ש f גזירה ברציפות, אם נעגל יפה את פינות המלבנים.

17 אינטגרלים לא אמיתיים ־ סוג שני: האינטגרל של פונקציה עם נקודות סינגולריות בקטע

17.1 התמודדות עם נקודות סינגולריות

1. a **נקודת סינגולריות** של f: בכל סביבה של a, הפונקציה f אינה חסומה.
2. דוגמא: 0 היא נקודת הסינגולריות היחידה של הפונקציה $\frac{1}{x}$ בקטע $[0,1]$.
3. **אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני** (מוגדרים אם הגבולות בהגדרה קיימים):

(א) אם a נקודת סינגולריות (יחידה) ו f אינטגרבילית בכל תת־קטע של $(a,b]$, $\int_a^b := \lim_{t\to a^+}\int_t^b$.

(ב) אם b נקודת סינגולריות (יחידה) ו f אינטגרבילית בכל תת־קטע של $[a,b)$, $\int_a^b := \lim_{t\to b^-}\int_a^t$.

(ג) אם a,b נקודות סינגולריות ו f אינטגרבילית בכל תת־קטע של (a,b), $\int_a^b := \int_a^c + \int_c^b$ עבור $c\in(a,b)$ לבחירתנו (לא תלוי בבחירה).

(ד) אם $s_1 < \cdots < s_k$ הן כל נקודות הסינגולריות של f בקטע, ו f אינטגרבילית בכל תת־קטע שאינו מכיל אף אחת מהן, $\int_a^b := \int_a^{s_1} + \int_{s_1}^{s_2} + \cdots + \int_{s_k}^b$.

4. עבור פונקציה אינטגרבילית ב $[a,b]$ מתקיים: $\int_a^t \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b$, $\int_t^b \underset{t\to a^+}{\longrightarrow} \int_a^b$.

הפונקציה $\varphi(t) := \int_a^t f(x)\,dx$ רציפה בקטע, ולכן גם הפונקציה $\psi(t) := \int_t^b f(x)\,dt = \int_a^b - \int_a^t$ רציפה בקטע.

5. דוגמא: הפונקציה $\frac{1}{x^\alpha}$ רציפה ולכן אינטגרבילית ב $[0,1]$ כאשר $\alpha \leq 0$. עבור $\alpha > 0$ יש סינגולריות יחידה באפס, והאינטגרל מתכנס (למספר ידוע) $\iff \alpha < 1$ (!).

17.2 הקשר לאינטגרלים לא אמיתיים מסוג ראשון

1. אם a נקודת סינגולריות יחידה של f בקטע $(a,b]$ והפונקציה אינטגרבילית בכל תת־קטע סגור, אז מתקיים השיוויון

$$\int_a^b f\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{f(a+\frac{1}{t})}{t^2}\,dt$$

בין אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון לאינטגרל לא אמיתי מסוג שני, במובן שאם אחד מהם קיים, אז השני קיים ושווה לו.

כאשר האינטגרל הימני קיים: בכל קטע $[s,b]$ ($a<s<b$), נשתמש במשפט ההצבה המונוטונית, עם $u(t) := a + \frac{1}{t} : \left[\frac{1}{b-a}, \frac{1}{s-a}\right] \to [s,b]$.

2. כך אפשר להסיק מכל משפט עבור אינטגרל מסוג ראשון משפט אנלוגי עבור אינטגרל מסוג שני.

18 התכנסות במידה שווה של סדרות וטורי פונקציות: כאשר המשתנה לא ממש משנה

מוטיבציה: החלפת סדר גבולות בדרך כלל אינה אפשרית, למשל

$$\lim_{x\to0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx+1} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to0}\frac{1}{nx+1}.$$

נאתר מצבים שהחלפת סדר גבולות אפשרית.

18.1 התכנסות במידה שווה של סידרת פונקציות

1. $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ בתחום X: $f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n(x)$ לכל נקודה $x \in X$.
בפרט, דורשים שכל הפונקציות מוגדרות בכל הנקודות $x \in X$.
2. דוגמא: $0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{nx} =: f_n(x)$ בקטע $(0,1)$. בהגדרת ϵ-N, נקבל N שתלוי ב x.
3. דוגמא: $0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n+x} =: f_n(x)$ ב $[0,\infty)$. $\frac{1}{n+x} \le \frac{1}{n}$, לכן בהגדרת ϵ-N יש N שטוב לכל הנקודות x.
4. $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ **במידה שווה** בתחום X: לכל ϵ חיובי יש N שממנו ואילך מתקיים: $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ לכל הנקודות $x \in X$.
5. הדוגמא השניה לעיל מתכנסת במידה שווה, הראשונה לא: לכל n, הנקודה $\frac{1}{n}$ מקיימת $f_n(\frac{1}{n}) = 1$.
6. אם $\begin{matrix} f_n \longrightarrow f \\ g_n \longrightarrow g \end{matrix}$ במידה שווה אז לכל α, β מתקיים: $\alpha f_n + \beta g_n \longrightarrow \alpha f + \beta g$ במידה שווה.
7. אם $f_n \longrightarrow f$ במידה שווה בתחום A וגם בתחום B, אז $f_n \longrightarrow f$ במידה שווה בתחום $A \cup B$.
8. התכונות הבאות שקולות:
   (א) $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ במידה שווה בתחום X.
   (ב) הסידרה
$$\epsilon_n := \begin{cases} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| & \text{if supremum exists} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$
שואפת לאפס. במלים אחרות, הסידרה $\epsilon_n := \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ מוגדרת לבסוף, והחלק המוגדר שלה שואף לאפס.
   (ג) יש סידרה $0 \longrightarrow \epsilon_n$ כך שלבסוף מתקיים: $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon_n$ לכל הנקודות $x \in X$.
9. תרגיל: $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ במידה שווה בתחום $X \iff$ לכל סידרה (x_n) ב X מתקיים $0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |f_n(x_n) - f(x_n)|$.
10. **קריטריון קושי** להתכנסות במידה שווה: התכונות הבאות שקולות:
   (א) (f_n) מתכנסת במידה שווה בתחום X.
   (ב) לכל ϵ חיובי יש N כך שלכל $N \le n < m$ מתקיים: $|f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$ לכל הנקודות $x \in X$.
   ($\Leftarrow$) עבור m, n גדולים: $f_n \approx f \approx f_m$.
   ($\Rightarrow$) מקושי עבור סדרות ממשיות, בכל נקודה יש גבול $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.
   $|f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon \underset{\infty\leftarrow m}{\longleftarrow} |f_n(x) - f(x)|$ עבור $N \le n$.

18.2 התכנסות במידה שווה של טור פונקציות

1. עבור טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ המתכנס לכל נקודה $x \in X$, הפונקציה $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדרת לכל $x \in X$. נסמן $s_k(x) := \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **מתכנס במידה שווה** בתחום X אם $s(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} s_k(x)$ במידה שווה בתחום X.
2. התכונות הבאות שקולות:
   (א) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה בתחום X.
   (ב) סידרת השאריות $0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n =: r_k$ במידה שווה בתחום X.
   (ג) קריטריון קושי: לכל ϵ חיובי יש N כך שלכל $N \le k_1 < k_2$ מתקיים: $\left|\sum_{n=k_1+1}^{k_2} f_n(x)\right| \le \epsilon$ לכל הנקודות $x \in X$.
3. דוגמא: $\sum_n x^n = \frac{x}{1-x}$ בתחום $[0,1)$. אך לא במידה שווה: $r_k(x) = \frac{x^{k+1}}{1-x} \ge x^{k+1} \ge \frac{1}{2}$ עבור x מתאים. הטור מתכנס במידה שווה בכל תת־קטע סגור $[0,c]$ $(c<1)$: $0 \longrightarrow \frac{c^{k+1}}{1-c} \le r_k(x) \le 0$, או מהמשפט הבא.
4. **מבחן החסם של ויירשטרס:** אם $|f_n(x)| \le a_n$ לכל הנקודות $x \in X$ ו $\sum_n a_n < \infty$, אז הטור $\sum_n f_n(x)$ (והטור $\sum |f_n(x)|$) מתכנס במידה שווה בתחום X.
מקריטריון קושי.
5. דוגמא: $\sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$. $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, ולכן הטור מתכנס במידה שווה.
6. דוגמא לטור שמתכנס במידה שווה אך לא בהחלט: $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+x}$ בתחום $[0,1]$: מלייבניץ, $|r_k(x)| \le \frac{1}{(k+1)+x} \le \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0$. לא מתכנס בהחלט, מהשוואה ל $\sum \frac{1}{n}$.

19 התכנסות במידה שווה היא ממש שווה

19.1 שמירה על רציפות

1. גבול במידה שווה של פונקציות רציפות בנקודה a, רציף בנקודה a.
נקבע n מספיק גדול ואחר כך δ מספיק קטן, לקבל $f(x) \approx f_n(x) \approx f_n(a) \approx f(a)$.
2. גבול במידה שווה של פונקציות רציפות בקטע (מוכלל) הוא פונקציה רציפה בקטע. בהנחות אלה מתקיים:
$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$
אם טור פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה בקטע (מוכלל), סכומו הוא פונקציה רציפה בקטע. בהנחות אלה מתקיים:
$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$
3. דוגמא: $\sum_n x^n = \frac{x}{1-x}$ במידה שווה בכל תת־קטע סגור של $[0,1)$, ולכן (ואכן) סכומו פונקציה רציפה בכל הקטע $[0,1)$.
4. דוגמא: גבול (לא במידה שווה) של סידרת פונקציות רציפות לא חייב להיות רציף: f_n היא הפונקציה הלינארית־למקוטעין שהגרף שלה מחבר את הנקודות $(0,1), (\frac{1}{n},0), (1,0)$.
5. דוגמא להתכנסות של סידרת פונקציות רציפות לפונקציה רציפה שאינה במידה שווה: $0 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$.
לא במידה שווה: ניקח $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$.
6. **משפט דיני:** אם $f(x) \underset{n\to\infty}{\searrow} f_n(x)$ בקטע סגור $[a,b]$ והפונקציות (כולל f) רציפות בו, אז ההתכנסות היא במידה שווה.
מספיק להוכיח עבור $f(x)=0$.
נניח שההתכנסות אינה במידה שווה. יהי ϵ עד לכך: לכל k יש $n<k$ ונקודה x_k בקטע כך ש $\epsilon \le f_n(x_k) (\le f_k(x_k))$.
ניקח תת־סידרה מתכנסת $x \longleftarrow x_{m_k}$ בקטע. לכל n קבוע, לבסוף $n < m_k$ ולכן $\epsilon \le f_{m_k}(x_{m_k}) \le f_n(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_n(x)$.
7. מסקנה: עבור טור של פונקציות רציפות אי־שליליות בקטע סגור: התכנסות לפונקציה רציפה $\Longleftrightarrow$ התכנסות במידה שווה.
8. אפשר להפוך (על ידי מינוס) בכל המשפטים סדרות עולות ליורדות ופונקציות אי־שליליות לפונקציות אי־חיוביות.

19.2 שמירה על אינטגרביליות

1. גבול במידה שווה של סידרת פונקציות חסומות בתחום היא פונקציה חסומה בתחום.
2. דוגמא: ייתכן $f(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} f_n(x)$ רציפות וחסומות בקטע $[0,1]$ והפונקציה $f(x)$ אינה חסומה (מדיני, בהכרח גם אינה רציפה):
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x} & 0<x\le 1\end{cases},$$
ו $f_n(x)=\frac{1}{x}$ עבור $\frac{1}{n}\le x$ ובקטע $[0,\frac{1}{n}]$ הגרף שלה הוא הישר המחבר את הראשית עם הנקודה $(\frac{1}{n},n)$.
3. גבול במידה שווה של סידרת פונקציות אינטגרביליות בקטע סגור היא פונקציה אינטגרבילית בקטע.
מלבג.

20 אינטגרציה וגזירה איבר־איבר

20.1 אינטגרציה איבר־איבר

1. **אינטגרציה איבר־איבר:**

(א) אם $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ במידה שווה והפונקציות f_n אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f_n(x)\,dx$
($\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx$).
$\left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int(f_n - f)\right| \le \int |f_n - f| \le \int \epsilon_n = (b-a)\epsilon_n \longrightarrow 0$.

(ב) אם $s(x) = \sum_n f_n(x)$ במידה שווה והפונקציות f_n אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז $\int_a^b \sum_n f_n(x)dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)dx$.

2. דוגמא נגדית כאשר ההתכנסות אינה במידה שווה: בקטע $[0,2]$, גרף הפונקציה f_n מחבר בקטעים ישרים את הנקודות $(0,0), (\frac{1}{n}, n), (\frac{2}{n}, 0), (2,0)$. $f_n \longrightarrow 0$ אך $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \not\longrightarrow 0 = \int 0$.

20.2 גזירה איבר־איבר

1. **גזירה איבר־איבר** (גירסה עבור פונקציות)**:** נניח שכל התכונות הבאות מתקיימות בקטע סגור $[a,b]$:

(א) הפונקציות f_n גזירות, וסידרת הפונקציות (f_n') מתכנסת במידה שווה.

(ב) יש לפחות נקודה אחת c בה הסידרה $(f_n(c))$ מתכנסת.

אזי: סידרת הפונקציות (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע כולו לפונקציה f, ומתקיים $f_n' \longrightarrow f'$ ($(\lim_n f_n)' = \lim_n f_n'$).

ממשפט הערך הממוצע עבור הפונקציה $f_n - f_m$,

$$\frac{(f_n - f_m)(t) - (f_n - f_m)(x)}{t - x} = (f_n' - f_m')(d_{t,x}). \qquad (*)$$

עבור $x = c$, ו m, n גדולים, נקבל $(f_n - f_m)(t) \approx 0$, ומקושי קיים גבול $f \longrightarrow f_n$ במידה שווה. מ (*) שוב,

$$g_n(t) := \begin{cases} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} & t \ne x \\ f_n'(x) & t = x \end{cases} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} & t \ne x \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(x) & t = x \end{cases}$$

במידה שווה.

g_n רציפות ולכן g רציפה, ולכן

$$f'(x) := \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} g(t) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

2. **גזירה איבר־איבר** (גירסה עבור טורים)**:** נניח שכל התכונות הבאות מתקיימות בקטע סגור $[a,b]$:

(א) הפונקציות f_n גזירות, והטור $\sum_n f_n'$ מתכנס במידה שווה.

(ב) יש לפחות נקודה אחת c בה הטור $\sum_n f_n(c)$ מתכנס.

אזי: סידרת הטור $\sum_n f_n$ מתכנסת במידה שווה בקטע כולו, ומתקיים $(\sum_n f_n)' = \sum_n f_n'$.

3. דוגמא נגדית כאשר התנאי (ב) אינו מתקיים: $\sum_n \left(1 + \frac{x^n}{n!}\right)$ מתבדר למרות שטור הנגזרות מתכנס במידה שווה בכל קטע סופי.

4. דוגמא ליישום: $\sum_n nx^n = x \sum nx^{n-1} = x \cdot \sum (x^n)' = x \cdot (\sum x^n)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$ בקטע $(-1,1)$, כיון שבכל תת־קטע סגור, הטורים מתכנסים במידה שווה.

21 פונקציה רציפה שאינה גזירה בשום מקום

הפונקציה של ויירשטרס: ישנה פונקציה רציפה בכל הישר הממשי, שאינה גזירה באף נקודה.

$\varphi(x) := |x|$ ב $[-1,1]$, מורחבת ל $\mathbb{R}$ על ידי $\varphi(x+2) := \varphi(x)$ (שן מסור).

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x - y|$: מספיק לבדוק בנקודות עם $|x - y| \le 2$. בתחום $[-1,1]$: מאי־שיוויון המשולש. בתחום $[0,2]$: על ידי שינוי הנקודות $x \mapsto 1 - x$ (שכן $\varphi(1-x) = 1 - \varphi(x)$). בתחומים $[2k-1, 2k+1]$ או $[2k, 2k+2]$: על ידי הזזה ב $2k$.

בפרט, $\varphi(x)$ רציפה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה היא $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \le \sum \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty$ ולכן רציפה.

לכל m, x נבחר $h_m = \pm\frac{1}{2\cdot 4^m}$ כך שאין מספר שלם בין $4^m x$ ל $4^m x \pm \frac{1}{2} = 4^m(x + h_m)$.

$\frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m} = \begin{cases} 0 & m<n \\ \pm 4^n & n\le m \end{cases}$. (עבור $m<n$, $4^n h_m$ זוגי. עבור $n\le m$ אין שלם בין $4^n x$ ל $4^n(x+h_m)$.)

אז:

$$\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\varphi(4^n(x+h_m))-\varphi(4^n x)}{h_m}}_{a_n}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m} a_n\right| \ge |a_m| - |a_1+\cdots+a_{m-1}| \ge$$

$$\ge |a_m| - (|a_1|+\cdots+|a_{m-1}|) = 3^m - (1+3+\cdots+3^{m-1}) = \frac{3^m+1}{2} \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$$

למרות ש $h_m \to 0$.

22 טורי חזקות

22.1 רדיוס ההתכנסות של טור חזקות

1. **טור חזקות:** טור פונקציות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
2. כל טור חזקות מתכנס בנקודה 0: $\sum a_n 0^n = a_0$.
3. טור חזקות המתכנס בנקודה α מתכנס בהחלט בקטע $(-|\alpha|, |\alpha|)$.
   $|a_n x^n| = |a_n \alpha^n| \cdot \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n \le c\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$.
4. לכל טור חזקות יש מספר $0\le r\le\infty$ כך שהטור מתכנס בהחלט עבור $|x|<r$ ומתבדר עבור $r<|x|$.
   $r =$ הסופרמום של המספרים $|\alpha|$ כך שהטור מתכנס בנקודה α.
5. המספר r הנ"ל נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור.
6. $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ (כאשר מסמנים $\frac{1}{\infty} := 0, \frac{1}{0} := \infty$).
   ממבחן השורש: $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$.
7. אם הגבול $r := \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ קיים, אז הוא רדיוס ההתכנסות.
   ממבחן המנה.
8. **תחום התכנסות** של טור פונקציות: קבוצת הנקודות בהן הטור מתכנס.
9. בנקודה r ייתכנו כל 4 האפשרויות. דוגמאות:
   (א) $\sum x^n$. $r=1$. תחום התכנסות $(-1,1)$.
   (ב) $\sum \frac{x^n}{n+1}$. $r=1$. תחום התכנסות $[-1,1)$
   (ג) $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \sum \frac{(-x)^n}{n+1}$ תחום התכנסות $(-1,1]$.
   (ד) $\sum \frac{x^n}{(n+1)^2}$. תחום התכנסות: $[-1,1]$.
10. ראינו: $\sum x^n$ מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו $(-1,1)$.

22.2 התכנסות במידה שווה

1. טור חזקות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו.
   מספיק להוכיח ל $0<r$.

אם הקטע הסגור $[a,b]$ מוכל ב $(-r,r)$: יש $0<\alpha$ עם $[a,b]\subseteq[-\alpha,\alpha]\subseteq(-r,r)$. אז $\sum|a_n x^n| \le \sum |a_n\alpha^n| < \infty$.

אם הקטע הוא מהצורה $[0,r]$: ניזכר בהוכחת המשפט שאם $a_k \longrightarrow 0$ מונוטונית יורדת והטור $\sum b_k$ חסום על ידי קבוע c, אז $\sum b_k a_k$ מתכנס. הוכחנו: $|b_1 a_1+\cdots+b_n a_n| \le 2ca_1$.

יהי $0<\epsilon$. נקבע N שאחריו $|a_m r^m+\cdots+a_n r^n|<\epsilon$. עבור מספר קבוע $N<m$, נקבל

$$|a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_n x^n| = \left|(a_{m+1}r^{m+1})\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}+\cdots+(a_n r^n)\left(\frac{x}{r}\right)^n\right| \le 2\epsilon\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} \le 2\epsilon .$$

.

אם הקטע הוא מהצורה $[-r,0]$: נפעיל את המקרה הקודם על הטור $\sum a_n(-x)^n = \sum(-1)^n a_n x^n$.

כל קטע סגור אחר בתחום ההתכנסות מוכל באיחוד של לכל היותר שני קטעים מהצורה הנ"ל.

2. טור חזקות הוא פונקציה רציפה בכל תחום התכנסותו.

3. אם טור חזקות מתכנס במידה שווה בקטע מהצורה $(r-\delta, r)$ (לאיזשהו δ חיובי) אז הוא מתכנס בנקודה r.
מקושי: $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k r^k\right| \xrightarrow[x\to r^-]{} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| \leq \epsilon$.

4. אם טור חזקות מתכנס במידה שווה בקטע מהצורה $(-r, -r+\delta)$ אז הוא מתכנס בנקודה $-r$.

5. אם טור חזקות עם רדיוס התכנסות r מתכנס במידה שווה בקטע $(-r, r)$ אז תחום התכנסותו $[-r, r]$.

22.3 אינטגרציה וגזירה איבר־איבר

1. **אינטגרציה וגזירה איבר־איבר:**
   (א) לטורים $\sum a_n x^n$, $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\sum a_{n+1}(n+1)x^n$ אותו רדיוס התכנסות.
   $\sqrt[n]{n+1} \longrightarrow 1$.
   (ב) תחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$ מוכל בתחום ההתכנסות של $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   אם הטור הראשון מתכנס בנקודה α, ההתכנסות בקטע $[0, \alpha]$ (או $[\alpha, 0]$) היא במידה שווה. מפעילים אינטגרציה איבר־איבר בקטע.
   (ג) תחום ההתכנסות של $\sum a_{n+1}(n+1)x^n$ מוכל בתחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.
   מהסעיף הקודם.

2. ההכלה ההפוכה לא תמיד נכונה: $\sum(-1)^n x^n$ מתבדר ב 1, אך $\sum(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ מתכנס ב 1.

3. מסקנה: אפשר לבצע גזירה איבר־איבר של טור חזקות כמה פעמים שרוצים, מבלי לשנות את רדיוס ההתכנסות שלו.

23 הצגת פונקציה כסכום של טור חזקות (טורי טיילור־מקלורן)

23.1 תנאי מספיק להצגת פונקציה כטור חזקות

1. אם $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ בסביבה של הנקודה 0, אז $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

2. הפונקציה $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ גזירה מכל סדר ב $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n ולכן הטור $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ מתכנס בכל $\mathbb{R}$, ועדיין סכומו אינו $f(x)$ לאף $x \neq 0$.

3. **תנאי מספיק להצגת פונקציה כסכום טור חזקות (פיתוח מקלורן):** אם בקטע $[-\alpha, \alpha]$: f גזירה מכל סדר ויש קבוע c כך ש $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq c$ לכל x, n, אז $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ בקטע.
   בנוסף, לכל k, $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_k(x)$, כאשר $|r_k(x)| \leq \frac{c}{(k+1)!}\alpha^{k+1}$.
   מטיילור־מקלורן,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{n!}x^n + r_k(x)$$
$$|r_k(x)| = \left|\frac{f^{(k+1)}(a_{x,k})}{(k+1)!}x^{k+1}\right| \leq \frac{c\alpha^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

4. במשפט האחרון, מספיק: $\frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במידה שווה בקטע כדי שתהיה הצגה כסכום טור חזקות (אבל הערכת השגיאה עשויה להשתנות).

5. אם רוצים **פיתוח טיילור** סביב נקודה $a \neq 0$, $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, לוקחים פיתוח מקלורן (סביב 0) של $g(x) := f(x+a)$.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x+a)\mid_{x=0}}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Longleftarrow f(x+a) = \sum a_n x^n$$
$$f(t) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n \Longleftarrow f(\underbrace{x+a}_{t}) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n \Longleftarrow$$

.

6. פיתוח מקלורן של e^x: בקטע $[-|x|,|x|]$, $\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| \le e^{|x|}$. לכן

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum \frac{x^n}{n!}$$

בקטע. זה נכון לכל מספר x, לכן הזהות תקפה לכל x ממשי.

בפרט, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$.

חסם על השגיאה כשלוקחים k מחוברים ראשונים: $\frac{e}{k!} \le \frac{3}{k!}$.

7. פיתוח מקלורן של $\sin x$: סידרת הנגזרות היא $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \ldots$. בערכן המוחלט, כולן חסומות על ידי 1.

לכן $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ לכל x.

חסם על השגיאה כשלוקחים k מחוברים ראשונים בטור האחרון (מה ששקול ל $2k+1$ מחוברים בטור החזקות הפורמלי, כולל האפסים): $\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

23.2 מציאת פיתוח חדש בעזרת פיתוחים קודמים

בדרך כלל יותר קל לחשב את הפיתוח מתוך פיתוחי מקלורן ידועים אחרים, מבלי לחשב נגזרות, ואת השגיאה חוסמים בדרכים אחרות, כגון החסם על השגיאה בטורים עם סימנים מתחלפים.

1. פיתוח מקלורן של $\frac{1}{(1-x)^k}$:

(א) $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ בתחום $(-1,1)$ (טור הנדסי) .

(ב) מגזירה איבר־איבר: $\sum (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

(ג) מגזירה איבר־איבר: $\sum \binom{n+2}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$.

(ד) באינדוקציה, נקבל שבאופן כללי: $\sum \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

2. אם $f(x) = \sum a_n x^n$, אז לכל α, k: $f(\alpha t^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n t^{kn}$ פיתוח מקלורן.

3. פיתוח מקלורן של $\log(1+x)$: $\frac{1}{1+t} = \sum (-t)^n = \sum (-1)^n t^n$. מאינטגרציה איבר־איבר בקטע $[0,x]$,

$$\log(1+x) = \sum \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots .$$

אומדן $\log 2$: הטור מתכנס ב $x=1$, וגם הפונקציה $\log$ רציפה, לכן $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$.

חסם על השגיאה בלקיחת k אברי טור, לפי טור מתחלף: $\frac{1}{k+1}$. כאן צריך כאלף איברים בשביל שגיאה קטנה מאלפית.

4. הערכה יותר טובה של $\log 2$: מהצבה, $\log(1-x) = \sum \frac{-x^{n+1}}{n+1}$, ולכן

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum((-1)^n + 1)\frac{x^{n+1}}{n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

בקטע $(-1,1)$. הפונקציה $\frac{1+x}{1-x} : (-1,1) \to (0,\infty)$ היא על. למשל, נפתור $\frac{1+x}{1-x} = 2$ לקבל $x = \frac{1}{3}$, ולכן

$$\log 2 = 2\left(1\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots\right).$$

חסימת השגיאה בלקיחת k איברים מהסכום האחרון: ץ

$$2\left(\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} + \frac{1}{2k+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+3} + \cdots\right) \le \frac{1}{k}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+3} + \cdots\right) = \frac{9}{8k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}.$$

לדיוק אלפית מספיקים 3 איברים!

5. פיתוח מקלורן של $\arctan x$: $\frac{1}{1+t^2} = \sum(-t^2)^n = \sum(-1)^n t^{2n}$ בקטע $(-1,1)$. מאינטגרציה איבר־איבר בקטע $[0,x]$,

$$\arctan x = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \ .$$

שני האגפים רציפים משמאל בנקודה 1, לכן $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$, וקיבלנו נוסחה נאה ל π.
חסם על השגיאה (טור מתחלף): $\frac{1}{2k+1}$. מתכנס לאט.

טור שמתכנס מהר יותר ל π: $\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 - \cdots$. חסם על השגיאה: $\frac{1}{2k+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k+1}$. עבור $n=3$ נקבל דיוק של אלפית.

23.3 חישוב מקורב של אינטגרלים בעזרת פיתוח טיילור־מקלורן

קירוב אינטגרלים של פונקציות ללא פונקציה קדומה אלמנטרית: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$. מהפיתוח של $\sin x$ נקבל $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$. מאינטגרציה איבר־איבר,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} \cdots$$

וכבר שלשת האיברים הראשונים נותנים דיוק של פחות מ $\frac{1}{30{,}000}$.