חדוו"א 2 - סיכום טענות ומשפטים

30 ביוני 2011

1 אינטגרל רימן

חלוקות של קטע

חלוקה של קטע $[a,b]$ הינה אוסף סדור סופי של נקודות מהצורה:

$$T=\{t_k:0\le k\le n\}=\{a=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=b\}$$

קוטר החלוקה $T=\{a=t_0<t_1<..<t_n=b\}$ מוגדר על ידי:

$$\lambda(T):=\max\{t_{k+1}-t_k:0\le k<n\}$$

החלוקה $T'=\{a=t'_0<...<t'_n=b\}$ **מעדנת** את החלוקה T אם מתקיים כי $\{t_k\}_{k=0}^n\subseteq\{t'_k\}_{k=0}^n$ (נסמן $T\prec T'$)

בהינתן שתי חלוקות T ו־T' **ההעדנה המשותפת** שלהן הינה חלוקה חדשה המוגדרת על ידי:

$$T\vee T'=\{t_k:0\le k\le n\}\cup\{t'_k:0\le k\le n\}$$

סכומי רימן

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ותהי $T=\{a=s_0<s_1<...<s_{n-1}<s_n=b\}$ חלוקה של הקטע $[a,b]$, **סכום רימן** של f בקטע $[a,b]$ הינו

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(x_i)(s_i-s_{i-1})$$

כאשר $x_i\in[s_{i-1},s_i]$. נשים לב שהסכום תלוי בחלוקה T וכן בבחירת הנקודות x_i.

הגדרה 1.1 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, נאמר ש־f **אינטגריבלית רימן** על $[a,b]$ ($f\in R([a,b])$) אם קיים I כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T המקיימת $\lambda(T)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות מתאימות לחלוקה מתקיים

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

במידה והגבול הנ"ל אכן קיים הוא יקרא האינטגרל המסוים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ ויסומן $\int_a^b f(x)dx$, לכן נוכל לרשום:

$$\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta s_i=\int_a^b f(x)dx$$

כאשר $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ (s_i נקודות חלוקה).

סכומי דרבו

בהינתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, וחלוקה $T=\{a=t_0<t_1<..<t_{n-1}<t_n=b\}$ אזי **סכום דרבו עליון** (של f ביחס ל־T)

$$\bar{S}(f,T):=\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\sup_{[t_k,t_{k+1}]}f$$

סכום דרבו תחתון מוגדר על ידי

$$\underline{S}(f,T):=\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\inf_{[t_k,t_{k+1}]}f$$

טענה 1.2 יהיו T,T' חלוקות של הקטע $[a,b]$, אם T' הינה העדנה של T אזי $\bar{S}(f,T')\le\bar{S}(f,T)$ וכן $\underline{S}(f,T)\le\underline{S}(f,T')$.

טענה 1.3 יהיו T,T' חלוקות כלשהן של הקטע $[a,b]$ אזי $\underline{S}(f,T)\le\bar{S}(f,T')$.

התנודה של f בקטע $[a,b]$ מוגדרת על ידי

$$\omega_{[a,b]}(f):=\sup_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|=\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f$$

טענה 1.4 אם T' מעדנת את T על ידי הוספת p נקודות חלוקה אזי

$$\bar{S}(f,T)\le\bar{S}(f,T')+p\lambda(T)\omega_{[a,b]}(f)$$
$$\underline{S}(f,T)\ge\underline{S}(f,T')-p\lambda(T)\omega_{[a,b]}(f)$$

אינטגרל עליון ותחתון של פונקציה חסומה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרים על ידי:

$$\bar{\int_a^b}f:=\inf_T\{\bar{S}(f,T)\}\quad\underline{\int_a^b}f:=\sup_T\{\underline{S}(f,T)\}$$

משפט 1.5 (משפט דרבו) אם $f(x)$ היא פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ אזי

$$\bar{\int_a^b}f=\lim_{\lambda\to0}\bar{S}(f,T)\quad\underline{\int_a^b}f=\lim_{\lambda\to0}\underline{S}(f,T)$$

או בניסוח אחר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T שעבורה $\lambda(T)<\delta$ מתקיים $|\bar{S}(f,T)-\bar{\int}f|<\varepsilon$ (ובאותו אופן עבור הגבול השני).

תנאים לקיומו של האינטגרל המסוים

משפט 1.6 אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי f חסומה בקטע.

משפט 1.7 עבור פונקציה חסומה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אם מתקיים שוויון בין האינטגרל העליון לתחתון, אזי f אינטגרבילית וכן $\int_a^b f=\bar{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f$.

מסקנה 1.8 בכדי שפונקציה f תהיה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ מספיק שהיא תהיה חסומה ותקיים את התנאי הבא: לכל $\varepsilon>0$ קיימות שתי חלוקות T_1,T_2 (ייתכן $T_1=T_2$) כך שעבורן מתקיים

$$|\bar{S}(T_1)-\underline{S}(T_2)|<\varepsilon$$

משפט 1.9 (תנאי רימן לאינטגרביליות) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ו־$T=\{a=x_0<x_1<..<x_{n-1}<x_n=b\}$ חלוקה, נסמן

$$\Delta(f,T):=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

כאשר $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ו־ω_i התנודה של f בקטע $[x_{i-1},x_i]$. אזי f אינטגרבילית רימן אם ורק אם

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\Delta(f,T)=0$$

משפט 1.10 תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ו־T חלוקה של הקטע. יהי $\varepsilon>0$ נסמן:

$$G_\varepsilon=\{i:\omega_i<\varepsilon\}$$
$$E_\varepsilon=\{i:\omega_i>\varepsilon\}$$

כאשר ω_i התנודה של f בקטע $[x_{i-1},x_i]$ בחלוקה T.

משפט 1.11 אזי f אינטגרבילית רימן אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה T כך ש־

$$\sum_{i\in E_\varepsilon}\Delta x_i<\varepsilon$$

($\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $x_i\in T$).

משפחות של פונקציות אינטגרביליות

משפט 1.12 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם f מקיימת את אחת מהדרישות הבאות אזי היא אינטגרבילית בקטע.

- f רציפה ב־$[a,b]$.
- ל־f מספר סופי של נקודות אי רציפות בקטע.
- f מונוטונית בקטע.

משפט 1.13 (משפט לבג) תנאי הכרחי ומספיק לכך שפונקציה חסומה f תהיה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ הוא שקבוצת נקודות אי הרציפות שלה תהיה בעלת מידה אפס. (קבוצת נקודות על הישר הינה בעלת מידה אפס אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצת קטעים המכסה את הקבוצה, כך שסכום ארכי הקטעים קטן מ־ε).

משפט 1.14 אם $f(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו־$f^*(x)=f(x)$ לכל x בקטע פרט למספר סופי של נקודות, אזי גם $f^*(x)$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים

$$\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

כלומר, **שינוי פונקציה במספר סופי של נקודות אינו משפיע על ערך האינטגרל.**

משפטים יסודיים של החשבון האינטגרלי

משפט 1.15 אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית בכל קטע $[\alpha,\beta]$ החלקי לו .

משפט 1.16 (אדיטיביות של אינטגרל) יהיו $a<c<b$, אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,c]$ ו־$[c,b]$ אזי היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

משפט 1.17 (רציפות האינטגרל) תהי $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, אזי הפונקציה $F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ הינה פונקציה רציפה ליפשיץ בקטע $[a,b]$.

משפט 1.18 (גזירות האינטגרל) תהי $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, בכל נקודה x בקטע שבה f רציפה הפונקציה $F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ גזירה ומתקיים

$$F'(x)=f(x)$$

משפט 1.19 (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי) תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בפנים הקטע (פרט אולי למספר סופי של נקודות) ומקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל x בקטע (פרט אולי למספר סופי של נקודות). אזי

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$$

התכונות היסודיות של פונקציות אינטגרביליות ושל האינטגרל המסוים

משפט 1.20 יהיו f,g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי:

- אם $c\in\mathbb{R}$ אזי $cf(x)$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_a^b cf=c\int_a^b f$.
- הפונקציות $f(x)\pm g(x)$ אינטגרביליות ומתקיים $\int_a^b f(x)\pm g(x)=\int_a^b f(x)\pm\int_a^b g(x)$.
- הפונקציה $f(x)g(x)$ אינטגרבילית בקטע.
- אם קיים קבוע $c>0$ כך ש־$|g(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$ אזי הפונקציה $\frac{1}{g(x)}$ אינטגרבילית בקטע.
- הפונקציה $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע וכן מתקיים $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$ (ההפך לא בהכרח נכון).
- אם $f(x)\le g(x)$ בקטע אזי $\int_a^b f\le\int_a^b g$.

משפט 1.21 (ערך הביניים האינטגרלי) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $g(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע השומרת על סימן קבוע שם. אזי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך שמתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x)g(x)=f(c)\int_a^b g(x)$$

שיטות אינטגרציה מסוימות

החלפת משתנים תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ו־ $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ מונוטונית עולה וגזירה ברציפות, וכן $\varphi(\alpha)=a$ ו־$\varphi(\beta)=b$. אזי הפונקציה $g:=f\circ\varphi(t)\cdot\varphi'(t):[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

במידה ו־f רציפה אזי אין צורך לדרוש ש־ $\varphi(t)$ תהיה מונוטונית עולה, מספיק שתקיים את התנאים שצוינו לעיל למעט המונוטוניות וכן שמתקיים $a\le\varphi(t)\le b$ לכל $t\in[\alpha,\beta]$.

אינטגרציה בחלקים נניח כי $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומות, כאשר g ו־f גזירות וכן f',g' אינטגרביליות, אזי מתקיים:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=[f(b)g(b)-f(a)g(a)]-\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

2 אינטגרלים לא אמיתיים

הגדרות

הגדרה 2.1 (קטע אינסופי) תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $a<b<\infty$ מתקיים כי $f\in R[a,b]$. אם קיים הגבול $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ אזי הוא נקרא האינטגרל הלא אמיתי של f בקטע $[a,\infty)$ ומסומן $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. אם הגבול קיים וסופי נאמר שהאינטגרל מתכנס.
(הגדרה דומה עבור $(-\infty,a]$).

הגדרה 2.2 (אינטגרל דו־סופי) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח כי $f\in R[a,b]$ לכל $-\infty<a<b<\infty$ נגדיר

$$\int_{-\infty}^{\infty} f=\int_{-\infty}^{a} f+\int_a^\infty f$$

אם שני האינטגרלים קיימים וסופיים. באופן שקול ניתן לדרוש קיום של הגבול

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to-\infty}\int_M^N f(x)\,\mathrm{d}x$$

הגדרה 2.3 (פונקציה לא חסומה) תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי $f\in R[\alpha,b]$ לכל $a<\alpha<b$, אם קיים הגבול

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

אזי הוא נקרא האינטגרל הלא אמיתי של f בקטע $(a,b]$ ומסומן ב־$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
הערה: במקרה של f חסומה האינטגרל הלא אמיתי קיים ומתכנס אם ורק אם במידה ונגדיר $f(a)=c$ נקבל כי $f\in R[a,b]$.

תכונות בסיסיות

נסמן מעתה ב־ω נקודה בעייתית של f, כלומר $\omega=\pm\infty$ או קצה קטע פתוח ש־f אינה חסומה בו.
ניוטון־לייבניץ אם $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח ש־ $f\in R[a,b]$ לכל $a<b<\omega$, כמו כן נניח $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,\omega)$ אזי

$$\int_a^\omega f(x)\,dx=\lim_{b\to\omega}(F(b)-F(a))$$

אדיטיביות

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

ליניאריות

$$\int_a^\omega(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\int_a^\omega f(x)+\beta\int_a^\omega g(x)$$

(במידה והגבולות קיימים)
מונוטוניות אם $f\le g$ אזי מתקיים $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$.
אינטגרציה בחלקים

$$\int_a^\omega fg'=\lim_{b\to\omega}[f(b)g(b)-f(a)g(a)]-\int_a^\omega f'g$$

(במידה והגבולות קיימים וכן מתקיימים התנאים על f,g עבור ביצוע אינטגרציה בחלקים)
החלפת משתנים נניח כי $\varphi:[a,\omega)\to[c,\eta)$ כאשר $\varphi(a)=c$ ו־ $\lim_{x\to\omega}\varphi(x)=\eta$, כמו כן נניח כי $\varphi\in C^1[a,b]$ לכל $a<b<\omega$ וכי φ עולה. אזי מתקיים:

$$\int_a^\omega f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{b\to\omega}\int_c^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^\eta f(x)\,\mathrm{d}x$$

קריטריונים להתכנסות

משפט 2.4 (קריטריון קושי) תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $a<b<\omega$ מתקיים כי $f\in R[a,b]$, אזי $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ קיים וסופי אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $a<B<\omega$ כך שלכל $B<b_1,b_2<\omega$ מתקיים $|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$.

הגדרה 2.5 תהי $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$, כך ש־$f\in R[a,b]$ לכל $a<b<\omega$. נאמר ש־ f $\int_a^\omega$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\omega|f|<\infty$.

טענה 2.6 אם $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

טענה 2.7 תהי $f\ge0$ ונניח $f\in R[a,b]$ לכל $a<b<\omega$ אזי $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ קיים (במובן הרחב). האינטגרל מתכנס אם ורק אם $F(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ חסומה.

מסקנה 2.8 (השוואה בין פונקציות שומרות סימן) יהיו $0\le f\le g$ אזי:

- $\int_a^\omega f<\infty \Leftarrow \int_a^\omega g<\infty$
- $\int_a^\omega g=\infty \Leftarrow \int_a^\omega f=\infty$

המסקנה הנ"ל נכונה גם עבור $g\le f\le 0$, עבור $-\infty$ וסימני אי שוויון הפוכים.
ניסוח גבולי עבור קריטריון ההשוואה נניח ש־ω נקודה בעייתית יחידה עבור f,g בקטע $[a,\omega)$ וקיים $L=\lim_{x\to\omega^-}\frac{f}{g}$ אזי

- אם $0<L<\infty$ האינטגרלים $\int_a^\omega f$ ו־$\int_a^\omega g$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.
- אם $L=0$ אזי $\int_a^\omega f<\infty \Leftarrow \int_a^\omega g<\infty$.
- אם $L=\infty$ אזי $\int_a^\omega g=\infty \Leftarrow \int_a^\omega f=\infty$.

פונקציות להשוות מולן במידה ומדובר בקטע פתוח $(\omega,b]$ (מקרה נפוץ $\omega=0$) נשווה עם $\frac{1}{(x-\omega)^\alpha}$ כאשר

$$\int_\omega^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-\omega)^\alpha}=\begin{cases}converges, & \alpha<1\\ diverges, & \alpha\ge1\end{cases}$$

במידה ומדובר בקטע $[a,\infty)$ נשווה עם $\frac{1}{x^\alpha}$ כאשר

$$\int_a^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\begin{cases}converges, & \alpha>1\\ diverges, & \alpha\le1\end{cases}$$

טענה 2.9 (השוואה בין אינטגרל לטור) תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ ונניח $f\in R[1,b]$ לכל $1<b<\infty$. כמו כן נניח $f\ge0$ וכן f **יורדת**. אזי $\int_1^\infty f$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתכנס. יתר על כן:

$$\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

משפט 2.10 (קריטריון דיריכלה) תהיינה $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות על כל תת קטע סגור וסופי. נניח ש־f מונוטונית ו־g רציפה וכן $f\in C^1[a,\omega)$. אם בנוסף $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ וכן $G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ חסום, אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט 2.11 (קריטריון אבל) תהיינה $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות על כל תת קטע סגור וסופי. נניח ש־f מונוטונית ו־g רציפה וכן $f\in C^1[a,\omega)$. אם בנוסף f חסומה וכן $\int_a^\omega g$ מתכנס, אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

הערה 2.12 באופן כללי כאשר אנו בודקים התכנסות של אינטגרל $\int_a^b f$ עלינו לבדוק בנפרד עבור כל אחת מהנקודות הבעייתיות של f בקטע $[a,b]$. אם למשל a,ω,b נקודות בעייתיות אזי נכתוב

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\omega f + \int_\omega^\beta f + \int_\beta^b f$$

עתה יש לבדוק את ההתכנסות של כל אחד מהאינטגרלים הנ"ל בנפרד, כאשר על כל אחד מהאינטגרלים להיות קיים וסופי על מנת שהאינטגרל $\int_a^b f$ יתכנס (כלומר אם גילינו שאחד האינטגרלים לא קיים וסופי אזי אין צורך להמשיך לבדוק).

3 סדרות וטורי פונקציות (כללי)

התכנסות נקודתית תהי $f_n(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות. אזי f_n מתכנסת נקודתית ל-f בקטע $[a,b]$ אם לכל $x\in[a,b]$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

התכנסות במידה שווה תהי $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות. נאמר ש-$f_n\to f$ במידה שווה (נסמן $f_n \rightrightarrows f$) אם

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|\to 0$$

או באופן שקול, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n\ge N$ וכל x מתקיים $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

תכונות של התכנסות במ"ש

- אם $f_n\rightrightarrows f$ וכן $g_n \rightrightarrows g$ אזי $g_n\pm f_n\rightrightarrows g\pm f$.
- אם $f_n\rightrightarrows f$ וכן $g_n\rightrightarrows g$ וכמו כן סדרות הפונקציות חסומות במידה אחידה, אזי $g_nf_n\rightrightarrows gf$ (לא בהכרח נכון ללא החסימות).

משפט 3.1 (קריטריון קושי להתכנסות במ"ש) תהי $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות. $f_n\rightrightarrows f$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N_ε כך שלכל $n,m>N_\varepsilon$ ולכל $x\in[a,b]$ קיים $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ (או באופן שקול $\sup_{[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$).

משפט 3.2 תהיינה $f,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי f_n רציפות וכן $f_n\rightrightarrows f$, אזי f רציפה.

משפט 3.3 (דיני) תהיינה $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות רציפות, כך ש-f_n מתכנסת ל-f נקודתית. כמו כן נניח כי f_n מונוטונית (כסדרה לכל x קבוע), וכן $f=\lim f_n$ רציפה. אזי במקרה זה מתקיים כי ההתכנסות היא במ"ש, $f_n\rightrightarrows f$.

(**הערה:** חשוב שמדובר **בקטע סגור**).

משפט 3.4 (אינטגרציה) תהיינה $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי $f_n\rightrightarrows f$. נניח גם כי $f_n\in R[a,b]$ לכל n, אזי גם $f\in R[a,b]$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

משפט 3.5 (אינטגרלים לא אמיתיים) תהי $f_n:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות ונניח כי f_n מתכנסת ל-f נקודתית וכן כי f_n אינטגרביליות ו- $\int_0^\infty f_n$ מתכנס. אם בנוסף לכך מתקיים גם :

- $f_n\rightrightarrows f$ על כל קטע סופי וסגור $[a,b]$.
- קיימת $\psi\ge 0$ כך ש- $\int_a^\infty \psi<\infty$ וכן $\forall n\forall x\ |f_n(x)|\le\psi$ (החל ממקום מסוים).

אזי $\int_a^\infty f$ קיים ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

משפט 3.6 (גזירות) תהי $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות. כמו כן נניח כי

- קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f_n(x_0)$ מתכנסת.
- סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש, $f_n'\rightrightarrows g$.

אזי קיימת f כך ש- $f_n\rightrightarrows f$ וכן $\lim_{n\to\infty} f_n' = f'$.

משפט 3.7 (ווירשטראס על צפיפות הפולינומים ב-$C[a,b]$) לכל $f\in C[a,b]$ קיימת סדרת פולינומים $P_n\in C[a,b]$ כך ש- $P_n\rightrightarrows f$.

מבחנים להתכנסות במ"ש של טורים

משפט 3.8 (M בוחן של ווירשטראס) תהי $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות ונניח שיש סדרת מספרים M_n כך ש- $\forall x\,|f_n(x)|\le M_n$. אם הטור $\sum_{n=1}^\infty M_n$ מתכנס אזי הטור $\sum_{n=1}^\infty f_n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה.

מבחן לייבניץ נתון טור מהצורה $\sum(-1)^n a_n(x)$ $(x\in D)$ וכן:

- $a_n(x)$ מונוטונית יורדת לכל x ב-D.
- $a_n(x)\rightrightarrows 0$ ב-D.

אזי $\sum(-1)^n a_n(x)$ מתכנס במ"ש.

מבחן דיריכלה נתון הטור $\sum_{n=1}^\infty f(x)g(x)$ וכן נתון כי:

- $f_n(x)$ יורדת לכל x בתחום D.
- $f_n(x)\rightrightarrows 0$ בתחום D.
- $\forall k\in\mathbb{N}\forall x\,|\sum_{n=1}^k g_n(x)|\le M$.

אזי הטור מתכנס במ"ש.

בהקשר הזה כדאי להכיר את שתי הזהויות הטריגונומטריות הבאות, העוזרות להוכיח חסימות של $\sum\sin(nx),\sum\cos(nx)$:

$$\sum_{n=1}^k \sin(nx) = \frac{\cos(\frac{x}{2})-\cos(k+\frac12)x}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\sum_{n=1}^k\cos(nx)=\frac{\sin((k+\frac12)x)-\sin(\frac x2)}{2\sin(\frac x2)}$$

מבחן אבל נתון כי $\sum g(x)$ מתכנס במ"ש וכן נתון כי $f_n(x)$ מונוטונית (או שומרת סימן) וחסומה במידה אחידה, אזי $\sum f(x)g(x)$ מתכנס במ"ש.

מבחני התכנסות לטורים עם איברים קבועים

מבחן ההשוואה עבור טורים חיוביים

מבחן השורש יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי, אם קיים $0<q<1$ כך ש- $\sqrt[n]{a_n}<q$ לכל n(החל ממקום מסוים) אזי הטור מתכנס.

מבחן השורש הגבולי יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי, אם $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$ אזי הטור מתכנס.

מבחן המנה יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי:

- אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$ לכל n (החל ממקום מסוים) הטור מתכנס.
- אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי הטור מתבדר

מבחן המנה הגבולי יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי:

- אם $\limsup(\frac{a_{n+1}}{a_n})<1$ הטור מתכנס.
- אם $\liminf(\frac{a_{n+1}}{a_n})\ge 1$ הטור מתבדר.

מבחן העיבוי של קושי יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי ו- a_n סדרה **מונוטונית יורדת** אזי הטורים $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו- $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

4 טורי חזקות

למה 4.1 (רדיוס ההתכנסות של טור חזקות) אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס עבור x_0 כלשהוא כך ש־ $r < |x_0|$ אזי לכל $r' < r$ הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[-r', r']$.

משפט 4.2 (אבל) לכל טור חזקות קיים $R > 0$ כך שבקטע $(-R, R)$ הטור מתכנס ובקבוצה $\{x : |x| > R\}$ הטור מתבדר.

משפט 4.3 (קושי־הדמרד) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות, אזי

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

משפט 4.4 (רציפות טור חזקות) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$ אזי סכום הטור $S(x)$ הוא פונקציה רציפה בקטע $(-R, R)$.

משפט 4.5 (אינטגרציה איבר איבר) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$, אזי:

- הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ הוא בעל אותו רדיוס התכנסות כמו הטור המקורי.
- אם נסמן $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אזי לכל $|x| < R$ מתקיים : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \int_0^x S(t)dt$.
- אם הטור המקורי מתכנס ב־ $x = R$ ($x = -R$) אזי גם טור האינטגרלים מתכנס בנקודה זו.

משפט 4.6 (גזירה איבר איבר) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$. אזי:

- הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ המתקבל מהטור המקורי על ידי גזירה איבר איבר הוא בעל אותו רדיוס התכנסות כמו הטור המקורי.
- לכל $|x| < R$ מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = S'(x)$.
- אם טור הנגזרות מתכנס בנקודה $x = R$($x = -R$) אזי גם הטור המקורי מתכנס בנקודה זו והשוויון הנ"ל מתקיים.

חיבור טורי חזקות בהינתן $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R_1 ו־ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R_2 אזי מתקיים השוויון

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

כאשר הטור הנ"ל מתכנס ברדיוס התכנסות $R = \min\{R_1, R_2\}$ במידה ו־ $R_1 \neq R_2$, ולפחות ברדיוס R_1 במידה ו־ $R_1 = R_2$.

משפט 4.7 (משפט הגבול של אבל) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$. אם הטור מתכנס גם בנקודה $x = R$ אזי סכומו $S(x)$ הוא פונקציה רציפה משמאל בנקודה R.

סכימה על פי אבל נניח כי נתון טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות 1, אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי מתקיים

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

אולם גם כאשר הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס, ייתכן כי הגבול $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ קיים וסופי. במקרה זה קוראים לו **סכום אבל** של הטור ($(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n$)

סכימת צזארו סכום צזארו של טור מוגדר על ידי

$$(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0 + S_1 + .. + S_n}{n}$$

ההירכיה של שיטות הסכימה : סכימה רגילה ⇐סכימת צזארו ⇐ סכימת אבל.

משפט 4.8 (מרטן, כפל של טורים) תהיינה $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ סדרות מספרים, ונגדיר $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ והטור מתכנס בהחלט, וכן $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (מכפלת קושי של הטורים) מתכנס בהחלט ומתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$$

משפט 4.9 (טאובר) תהי $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ סדרה המקיימת $n a_n \to 0$. כמו כן נניח כי:

- הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס לכל $|x| < 1$.
- קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$.

אזי תחת תנאים אלה מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

טורי חזקות מרוכבים $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ כאשר $z, a_k \in \mathbb{C}$
אם נכתוב $a_n = u_n + i v_n$, אזי טור מספרים מרוכב מתכנס (בהחלט) כאשר שני הטורים $\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ מתכנסים (בהחלט).

טענה 4.10 הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, כאשר $|a_n| = \sqrt{Re(a_n)^2 + Im(a_n)^2}$.

משפט 4.11 (רדיוס התכנסות של טור חזקות מרוכב) המשפט עובר כלשונו, כלומר אם הטור מתכנס עבור $z_0 \in \mathbb{C}$ כאשר $|z_0| = r$. אזי לכל z המקיים $|z| < r$ הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה.

5 טורי פוריה

מכפלה פנימית נגדיר מכפלה פנימית עבור מרחב פונקציות 1 מחזוריות, אינטגרביליות רימן, על ידי

$$< f, g >:= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

פולינום טריגונומטרי הינו ביטוי מהצורה $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i2\pi nx}$.
מקדמי פורייה עבור $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1־ מחזורית ואינטגרבילית רימן, נגדיר את מקדמי פורייה על ידי

$$\hat{f}(n) :=< f, e_n >= \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} dx$$

הערה: נשים לב שאם $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i2\pi nx}$ פולינום טריגונומטרי, אזי מתקיים $\hat{P}(n) = a_n$, כמו כן עבור P, Q פולינומים טריגו' מתקיים $< P, Q >= \sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)\overline{\hat{Q}(n)}$. בפרט מתקיים

$$< P, P >= \int_0^1 |P(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{P}(n)|^2$$

טור פורייה המתאים לפונקציה 1־מחזורית f הינו:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{i2\pi nx}$$

ניתן גם לכתוב טור פורייה באמצעות $\sin(2\pi nx),\cos(2\pi nx)$, כלומר הטור המתאים ל־$f$ הינו

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(2\pi nx)+b_n\sin(2\pi nx)]$$

כאשר $a_n=<f,\cos(2\pi nx)>$, $b_n=<f,\sin(2\pi nx)>$, $a_0=<f,1>$.
הקשר בין $\hat{f}(n)$ למקדמים הנ"ל נתון על ידי:

$$\begin{array}{ll}\hat{f}(n)=\frac{1}{2}(a_n-ib_n) & n>0\\ \hat{f}(0)=a_0 & n=0\\ \hat{f}(n)=\frac{1}{2}(a_n+ib_n) & n<0\end{array}$$

נגדיר את **סכום פורייה החלקי** על ידי

$$S_Nf:=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{i2\pi nx}$$

למה (הטלה)

$$<f,S_Nf>=<S_Nf,f>=<s_Nf,s_Nf>=\sum_{n=-N}^{N}|\hat{f}(k)|^2$$

אי־שוויון בסל $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)|^2\le\int_0^1|f(t)|^2dt$

שיוויון פרסבל $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)|^2=\int_0^1|f(t)|^2dt$

למה 5.1 (הלמה של רימן־לבג) עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 1 מחזורית ואינטגרבילית רימן, מתקיים כי

$$\hat{f}(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

טענה 5.2 אם $f\in C^1(\mathbb{R})$ אזי $\hat{f}'(n)=i2\pi n\hat{f}(n)$

מסקנה 5.3 אם $f\in C^1(\mathbb{R})$ פונקציה 1 ־ מחזורית, אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|<\infty$.

מסקנה 5.4 (דעיכת מקדמים) אם $f\in C^k(\mathbb{R})$ אזי $\hat{f}(n)=o(|n|^{-k})$.

גרעין דיריכלה

$$D_N(t):=\sum_{k=-N}^{N}e^{i2\pi kt}$$

טענה 5.5 עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 1 מחזורית ואינטגרבילית מתקיים כי

$$s_Nf(t):=\int_0^1 f(t-x)D_N(x)\,\mathrm{d}x$$

טענה 5.6

$$D_N(t)=\frac{\sin[2\pi(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\pi x}$$

טענה 5.7 $\int_0^{\frac{1}{2}}D_N(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

גרעין פייר

גרעין פייר מוגדר על ידי $F_N(t):=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n(t)$
תכונות של גרעין פייר

$$F_N(t)=\frac{\sin^2\pi Nt}{N\sin^2\pi t}$$

טענה $\int_0^1F_N(t)\,\mathrm{d}t=1$ וכמו כן מתקיים כי $1\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\delta}^{\delta}F_N(t)\,\mathrm{d}t$ $\forall\delta>0$
טענה

$$\sigma_Nf(x):=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s_nf=\int_0^1f(t-x)F_N(x)\,\mathrm{d}x$$

התכנסות לפונקציה

משפט 5.8 (משפט פייר) אם $f\in C(\mathbb{R})$ 1 מחזורית אזי

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s_nf\xrightarrow[N\to\infty]{}f$$

כאשר ההתכנסות הינה במידה שווה. כמו כן אם בנקודה x_0 מתקיים כי ־ $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a^-$ ו־$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=a^+$ אזי $\sigma_Nf(x_0)\to\frac{a^++a^-}{2}$.

התכנסות נקודתית אם f רציפה ליפשיץ בסביבה של x_0 אזי $s_Nf(x_0)\to f(x_0)$.

משפט 5.9 (התכנסות במ"ש) אם $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2<\infty$ וגם $f\in C(\mathbb{R})$ או $s_Nf\to f$ נקודתית, אזי $s_nf\rightrightarrows f$.

מסקנה 5.10 אם $f\in C^1(\mathbb{R})$ אזי $s_nf\rightrightarrows f$.

משפט 5.11 (התכנסות בנורמה) אם $f\in C(\mathbb{R})$ 1 מחזורית ואינטגרבילית רימן, אזי $0\xrightarrow[n\to\infty]{}||s_nf-f||$ (התכנסות בנורמה של L_2).

טענה 5.12 (הוכחה בתרגול) הפולינומים הטריגונומטריים צפופים במ"ש ב־$C[0,1]$, כלומר אם $f\in C[0,1]$ קיימת סדרה P_N של פולינומים טריגונומטריים כך ש־

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-P_n(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

טענה 5.13 (הוכחה בתרגול) הפולינומים הטריגונומטריים צפופים בנורמה ב־$R[0,1]$, כלומר לכל $f\in R[0,1]$ (1־ מחזורית), קיימת סדרת פולינומים טריגונומטריים P_n כך ש־

$$||P_n-f||\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

קונבולוציה

עבור פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 1־מחזוריות, נגדיר

$$(f*g)(x)=\int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

תכונות של קונבולציה

- סימטריה ־ $f*g=g*f$
- $f*g$ רציפה תמיד
- $\widehat{(f*g)}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$

6 מרחבים מטריים

פונקצית מרחק (מטריקה) תהי X קבוצה, פונקציה $d:X\times X\to[0,\infty)$, נקראת פונקצית מרחק אם היא מקיימת:

- $d(x,x)=0$ וכן $d(x,y)=0$ אם ורק אם $x=y$.
- סימטריה־ $d(x,y)=d(y,x)$.
- אי־שוויון משולש $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

מרחב מטרי הינו קבוצה X עליה מוגדרת פונקציית מרחק d ־ (X,d).
נורמה יהי X מרחב וקטורי, אזי $||\cdot||:X\to\mathbb{R}$, נקראת נורמה אם היא מקיימת:

- חיוביות־ $||x||\ge 0$ לכל $x\in X$ וכן $||x||=0$ אם ורק אם $x=0$.
- הומוגניות־ $||\lambda x||=|\lambda|||x||$ (כאשר λ סקלר)
- אי־שוויון משולש־ $||x+y||\le||x||+||y||$

אם $||\cdot||$ הינה נורמה על מרחב X , אזי הפונקציה $d(x,y):=||x-y||$ הינה פונקציית מרחק.
נורמות במרחב $\mathbb{R}^n$: באופן כללי עבור $1\le p<\infty$ ניתן להגדיר נורמה $||x||_p=(\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}$.
כמו כן, $||x||_\infty=\max\{x_i\}_{i=1}^n$ הינה נורמה.
הנורמה האוקלידית הסטנדרטית הינה $||x||_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. אי שוויון חשוב עבור הנורמה האוקלידית:

$$\forall 1\le i\le n:|x_i-y_i|\le||x-y||\le\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$$

מאי שוויון זה נובע שאם $||x-y||\to 0$ אזי בפרט בכל קואורדינטה $|x_i-y_i|\to 0$ ולהפך.
התכנסות סדרה x_n במרחב מטרי X מתכנסת ל־$y\in X$ אם מתקיים $d(x_n,y)\underset{n\to\infty}{\to}0$. אם קיים גבול הוא יחיד (נובע מאי שוויון המשולש).
סדרת קושי במרחב מטרי הינה סדרה המקיימת שלכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $n,m>N_0$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.
כל סדרה מתכנסת במרחב מטרי הינה סדרת קושי, מרחב מטרי נקרא **שלם** אם כל סדרת קושי בו מתכנסת ($\mathbb{R}^n$ הוא מרחב מטרי שלם).

קבוצות פתוחות וסגורות

כדור פתוח סביב $x_0\in X$ ברדיוס r: $B(x_0,r):=\{x\in X:\ d(x,x_0)<r\}$.
כדור סגור סביב $x_0\in X$ ברדיוס r: $\overline{B}(x_0,r):=\{x\in X:\ d(x,x_0)\le r\}$.
הספירה סביב $x_0\in X$ ברדיוס r: $S(x_0,r):=\{x\in X:\ d(x,x_0)=r\}$.
קבוצה פתוחה $A\subseteq X$ הינה קבוצה פתוחה אם מתקיים

$$\forall x\in A\exists r_0\, s.t\, B(x,r_0)\subset A$$

טענה 6.1 יהי X מרחב מטרי:

1. הקבוצות $\emptyset,X$ תמיד פתוחות (בפרט $\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה).
2. איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
3. חיתוך **סופי** של קבוצות פתוחות הוא פתוח.

טענה 6.2 כדור פתוח $B(x_0,r)$ הינו תמיד קבוצה פתוחה.

קבוצה סגורה $A\subseteq X$ הינה קבוצה סגורה אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. כלומר אם $x_n\in A$ סדרה המקיימת $x_n\to x$ אזי גם $x\in A$.

טענה 6.3 יהי Xמרחב מטרי:

1. הקבוצות $X,\emptyset$ קבוצות סגורות (בפרט $\mathbb{R}^n$ סגורה)
2. חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
3. איחוד **סופי** של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

טענה 6.4 הקבוצות $S(x_0,r)$ ו־$\bar{B}(x_0,r)$ הן תמיד קבוצות סגורות.

משפט 6.5 A קבוצה פתוחה אם ורק אם A^c קבוצה סגורה.

פנים הפנים של $A\subseteq X$ הינו הקבוצה

$$int(A):=\{x\in A:\exists r_0\, s.t\, B(x,r_0)\subset A\}$$

.

טענה 6.6 הפנים של קבוצה A הינו החיתוך של כל תתי הקבוצות הפתוחות של A.

סגור הסגור של A הינו הקבוצה

$$\bar{A}:=\{x\in X:\ \exists x_n\in A\ x_n\to x\}$$

טענה 6.7 הסגור של קבוצה A הינו חיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A.

שפה של קבוצה A, מסומנת ∂A, מוגדרת על ידי $\partial A=\bar{A}\setminus int(A)$.
נשים לב כי השפה היא קבוצה סגורה, כמו כן $x\in\partial A$ אם ורק אם קיימת סדרה מ־A וסדרה מ־A^c כך ששתי הסדרות מתכנסות ל־x.

קבוצות קומפקטיות

קבוצה $A\subset X$ נקראת קבוצה קומפקטית אם לכל סדרה $\{x_n\}\subset A$ יש תת סדרה המתכנסת לאיבר ב־A.
קבוצה חסומה קבוצה $A\subset X$ נקראת חסומה אם היא מוכלת בכדור כלשהו.
ב־$\mathbb{R}^n$ קבוצה היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

משפט 6.8 (בולצאנו־וירשטראס) אם קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ היא חסומה (ע"פ הנורמה האוקלידית) לכל סדרה ב־A יש תת סדרה מתכנסת.

משפט 6.9 (הלמה של קנטור) אם $K_i\neq\emptyset$ קבוצה קומפקטית לכל i כך שמתקיים התנאי: $K_i\subset K_{i-1}$ (לכל $i>1$) וגם $\sup_{x,y\in K_i}||x-y||\to 0$, אזי מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i=\{x\}$$

משפט 6.10 (היינה־בורל) $A\subset X$ קבוצה קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי פתוח של A קיים תת־כיסוי סופי.

גבולות ורציפות

יהיו $(X,d),(Y,d)$ מרחבים מטריים ו־$f:X\to Y$.
גבול נניח כי $A\subset X$, $x_0\in\bar{A}$ ו־ $L\in Y$,
הגדרה על פי קושי נאמר שהגבול של f בנקודה x_0 הינו L אם מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\,s.t\,x\in B(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in B(L,\varepsilon)$$

הגדרה על פי היינה נאמר שהגבול של f בנקודה x_0 הינו L אם מתקיים:

$$\forall x_n\in A: x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to L$$

כמו בחדוו"א 1, ההגדרות הנ"ל שקולות.
רציפות פונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ x\in B(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in B(f(x),\varepsilon)$$

או באופן שקול אם מתקיים:

$$\forall x_n\in A: x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to f(x)$$

טענה 6.11 אם $f:A\to\mathbb{R}^m$, כלומר $f=(f_1,...,f_m)$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$, אזי f רציפה אם ורק אם f_i רציפה לכל i.

טענה 6.12 (הרכבה של פונקציות רציפות) יהיו $(X,d),(Y,d),(Z,d)$ מרחבים מטריים ו־$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$. אם f רציפה בנקודה $x_0\in X$ ו־g רציפה בנקודה $f(x_0)\in Y$. אזי ההרכבה $g\circ f$ הינה פונקציה רציפה בנקודה x_0.

טענה 6.13 (אריתמטיקה של פונקציות רציפות) יהי (X,d) מרחב מטרי ו־ $f,g:X\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות בנקודה x_0 אזי:

- $\alpha f+\beta g$ הינה פונקציה רציפה ב־x_0 לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
- המכפלה $f\cdot g$ הינה פונקציה רציפה בנקודה x_0.
- אם $g\neq 0$ אזי המנה $\frac{f}{g}$ היא פונקציה רציפה בנקודה x_0.

הערה: הטענה הראשונה נכונה גם עבור $f,g:A\to\mathbb{R}^m$ (כאשר $A\subseteq\mathbb{R}^n$), ובנוסף במקרה זה גם $<f(x),g(x)>:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הינה פונקציה רציפה.

משפט 6.14 (ויירשטראס) אם $f:K\to Y$ פונקציה רציפה ו־K קבוצה קומפקטית, אזי $f(K)$ קבוצה קומפקטית ב־Y.

מסקנה 6.15 במידה ו־$f:K\to\mathbb{R}$ רציפה ו־K קומפקטית, אזי f מקבלת מקסימום ומינימום, כלומר קיימים m,M כך ש־

$$\forall x\in A:\ f(m)\le f(x)\le f(M)$$

משפט 6.16 (שקילות נורמות ב־$\mathbb{R}^n$) כל נורמה $||\cdot||$ על $\mathbb{R}^n$ שקולה לנורמה האוקלידית $||\cdot||_2$.
(נורמות $||\cdot||_a$ ו־$||\cdot||_b$ נקראות שקולות אם קיים $M>1$ כך ש־ $\frac{||x||_b}{M}\le ||x||_a\le M||x||_b$ לכל x במרחב)

משפט 6.17 (קנטור) פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית, רציפה בה במ"ש.

7 חשבון דיפרנציאלי של פונקציות בכמה משתנים

העתקות לינאריות $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$
אם $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ (e_i בסיס של $\mathbb{R}^n$) אזי $f(x)=\sum_{i=1}^n x_if(e_i)$.
כידוע העתקה לינארית מוגדרת ביחידות (עבור בסיס מסוים) על ידי מטריצה $A_{m\times n}$ כאשר $(A)_{ij}=[f(e_j)]_i$.

טענה 7.1 אם $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ אזי היא רציפה.

עקומות ב־$\mathbb{R}^n$ עקומה/מסילה הינה פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$.
אם $\gamma(a)=\gamma(b)$ אזי המסילה נקראת עקום סגור. אם $\gamma|_{(a,b)}$ חח"ע אזי היא נקראת עקום פשוט.
בהינתן שתי מסילות $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ ו־$\gamma_2:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^m$ נאמר שהן **שקולות** אם קיימת העתקה $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ רציפה, חח"ע ועל המקיימת $\varphi(\alpha)=a$ ו־$\varphi(\beta)=b$, כך שמתקיים $\gamma_2(t)=\gamma_1(\varphi(t))$ (כלומר, שתי המסילות הן בעלות מסלול משותף).
קבוצה קשירה מסילתית $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא קשירה מסילתית אם לכל $x,y\in A$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to A$ כך ש־ $\gamma(0)=x$ ו־$\gamma(1)=y$.
קבוצה קמורה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא קמורה אם לכל $x,y\in A$ ולכל $0<t<1$ מתקיים $(tx+(1-t)y)\in A$.
(**הערה:** $[x,y]:=\{tx+(1-t)y:\ 0\le t\le 1\}$ הינו הקטע שמחבר את x ו־y)
קבוצה קשירה פוליגונלית קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת קשירה פוליגונלית אם לכל $x,y\in A$ קיימות נקודות כך שהקטעים $[x,x_1],[x_1,x_2],...,[x_m,y]$ מוכלים כולם ב־A.

גזירות ודיפרנציאביליות

גזירת עקומות תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ מסילה, נאמר ש־γ גזירה ב־t_0 אם קיים

$$\lim_{h\to0}\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h}=\gamma'(t_0)$$

באופן שקול נרשום $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_m)$, אזי γ גזירה אם ורק אם γ_i גזירה לכל i ומתקיים

$$\gamma'(t_0)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(t_0)\\ \vdots\\ \gamma_m'(t_0)\end{pmatrix}$$

נגזרות חלקיות תהי $f:U\to\mathbb{R}^n$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, נגדיר את הנגזרת החלקית לפי x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_{x_i}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_1,..,x_i+h,..,x_n)-f(x_1,..,x_n)}{h}$$

לצורך חישוב בפועל נתייחס לשאר המשתנים כקבועים ונגזור את f כרגיל (במידה וניתן).

טענה 7.2 $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}$, נניח f גזירה חלקית ביחס ל־x_i לכל i וכי $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ חסומות על U, אזי f רציפה ב־U.

דיפרנציאביליות תהי $f:U\to\mathbb{R}^m$ ו־$x_0\in U\subseteq\mathbb{R}^n$, אזי f דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אם קיימת $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ כך ש:

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o_{x\to x_0}(||x-x_0||)$$

במקרה כזה נאמר ש־$A=D_f(x_0)$ הינו הדיפרנציאל של f בנקודה x_0.

טענה 7.3 אם f דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אזי לכל i קיימת הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ וכן מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_f(x_0)e_i$$

טענה 7.4 אם f דיפרנציאבילית קיימת הנגזרת הכיוונית בכל כיוון $\hat{u}$ המוגדרת על ידי $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h\hat{u})-f(x_0)}{h}$ כאשר $||\hat{u}||=1$.

טענה 7.5 מספר טענות אודות הדיפרנציאל D_f:

- אם $f\equiv \vec{c}$ אזי $D_f\equiv 0$
- אם $D_f\equiv 0$ בתחום U (פתוח וקשיר פוליגונלית) אז $f\equiv \vec{c}$.
- אם $f(x)=Ax$ העתקה לינארית, אזי $D_f(x)=A$
- $D_{f+g}=D_f+D_g$
- אם $D_f=A$ לכל x אזי $f(x)=Ax+\vec{c}$.

טענה 7.6 אם f דיפרנציאבילית ב־x_0 אזי f רציפה ב־x_0.

דיפרנציאביליות ברציפות נאמר ש־$f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ אם מתקיים כי $f:U\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית בכל $x\in U$ וההעתקה $x\mapsto D_f(x)$ רציפה ב־U.

משפט 7.7 f דיפרנצאיבילית ברציפות אם ורק אם כל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות.

משפט 7.8 (כלל השרשרת) יהיו $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $V\subseteq\mathbb{R}^m$, $f:U\to V$ ו־$g:V\to\mathbb{R}^k$.
נניח כי f דיפרנציאבילית ב־$x_0\in U$ ו־g דיפרנציאבילית ב־$y_0=f(x_0)$, אזי $\varphi=g\circ f:U\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאבלית ב־x_0 ומתקיים

$$D_\varphi(x_0)=D_g(f(x_0))D_f(x_0)$$

משפט 7.9 (לגרנז') תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$f:U\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב־U. אם $x,y\in U$ שתי נקודות כך ש־ $[x,y]\subset U$, אזי קיימת נקודה $z\in[x,y]$ כך שמתקיים

$$f(y)-f(x)=<\nabla f(z),y-x>$$

נגזרות גבוהות ומשפט טיילור

משפט 7.10 (נגזרות מעורבות) תהי $f:U\to\mathbb{R}$ כאשר $U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, נניח כי עבור $1\le i\ne j\le n$ כלשהם קיים:

1. הנגזרות f_{x_i},f_{x_j} קיימות ורציפות ב־ U.
2. הנגזרת המעורבת $f_{x_ix_j}$ קיימת ורציפה ב־U.

אזי קיימת הנגזרת $f_{x_jx_i}$ בכל U ו־ $f_{x_jx_i}=f_{x_ix_j}$.
(**הערה:** בעקרון מדובר בתנאי מקומי, לכן מספיק לדרוש קיום של הנגזרות בסביבה של x_0 ורציפות ב־x_0)

משפט 7.11 (טיילור) סדר 2: נניח כי $f:U\to\mathbb{R}$ הינה C^3 , $x_0\in U$ ו־$h\in\mathbb{R}^n$ כך ש־$[x,x+h]\subset U$ אזי מתקיים

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n f_{x_i}f_{x_j}(x_0)h_ih_j+R_3(h)$$

כאשר קיימת נקודה $\theta\in(0,1)$ כך ש־

$$R_3(h)=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^n f_{x_ix_jx_k}(x_o+\theta h)h_ih_jh_k=o(||h||^3)$$

נשים לב כי אם נסמן ב־ $M=\sup_{x\in[x,x+h]}\{f_{x_ix_jx_k}(x):1\le i,j,k\le n\}$ אזי נקבל כי

$$R_3(h)\le\frac{n^3}{6}M||h||^3$$

(אם מסתפקים בהגדרת R_3 באמצעות $o(||h||^3)$ מספיק לדרוש דיפרנציאביליות ברציפות מסדר 2).
או בניסוח שקול

$$f(x_0+h)=f(x_0)+<\nabla f(x_0),h>+\frac{1}{2}<\nabla^2 f(x_0)h,h>+R_3(h)$$

כאשר $\nabla^2 f(x_0)$ הינה מטריצה $n\times n$ שנקראת $Hessian$ המקיימת $[\nabla^2 f(x_0)]_{ij}=f_{x_ix_j}(x_0)$.
סדר r: אם נניח כי f הינה C^{r+1} אזי מתקיים

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{k=1}^r\frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,..,i_k\le n}f_{x_{i_1}}f_{x_{i_2}}..f_{x_{i_k}}(x_0)h_{i_1}..h_{i_k}+R_{r+1}$$

כאשר R_{r+1} מוגדר באופן דומה ל־R_3.

מסקנה 7.12 אם $f:U\to\mathbb{R}$ הינה C^2 אזי לכל $x\in U$ ו־$h\in\mathbb{R}^n$ כך ש־$[x,x+h]\subset U$, קיימת $\theta\in(0,1)$ כך ש־

$$f(x_0+h)=f(x_0)+<\nabla f(x_0),h>+\frac{1}{2}<\nabla^2 f(x_0+\theta h)h,h>$$

נקודות קיצון

טענה 7.13 תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. נניח כי ל־f יש נקודת אקסטרמום מקומית ב־$x_0\in U$, אזי $\nabla f(x_0)=0$.

נקודה קריטית תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית, נקודה $x_0\in U$ נקראת נקודה קריטית אם $\nabla f(x_0)=0$.

משפט 7.14 (מיון נקודות סטציונריות) תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ו־$f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה C^2. תהי $x_0\in U$ נקודה קריטית:

1. אם $\nabla^2 f(x_0)>0$ (מטריצת ההסיאן מוגדרת חיובית) אזי x_0 נקודת מינימום מקומית
2. אם $\nabla^2 f(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מקסימום מקומית.
3. אם $\nabla^2 f(x_0)$ אינה מוגדרת חיובית או שלילית אזי x_0 נקודת אוכף.

מסקנה 7.15 במקרה $U\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^2$ פונקציה C^2 ו־$x_0\in U$ נקודה קריטית אזי:

1. אם בנקודה x_0 מתקיים $f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$ וכן $f_{xx}>0$, x_0 נקודת מינימום מקומית.
2. אם בנקודה x_0 מתקיים $f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$ וכן $f_{xx}<0$, x_0 נקודת מקסימום מקומית.
3. אם בנקודה x_0 מתקיים $f_{xx}f_{yy}<f_{xy}^2$, x_0 נקודת אוכף.