

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{(x^2)} - 1)^2}{\sin(3x)(1 - \cos(5x)) \ln(1+x)} \quad \text{א.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\pi x}{4} \quad \text{ב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{n^n} \quad \text{ג.}$$

2.

א. חשבו את $\int x \arctan(x) dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1}{xe^x} dx$.

3. תהי f פונקציה מונוטונית עולה ממש, כלומר לכל $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x_1) < f(x_2)$.

נניח בנוסף כי f גזירה בכל \mathbb{R} .

א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) \geq 0$.

ב. הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) > 0$.

4. תהי פונקציה f כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f''(x) > 0$.

א. נניח בנוסף כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x) = \infty$. הוכיחו כי ל f יש נק' מינימום גלובאלית.

ב. הוכיחו/הפריכו: ל f יש נק' מינימום גלובאלית, גם בלי הנתון הנוסף בסעיף א'.

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n^2$, ונתון כי $a_1 > a_2$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית יורדת.

ב. נניח כי $a_2 = 0$ חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$.

ב. תהי f גזירה שלוש פעמים בסביבה של 0, המקיימת $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ וכמו כן

$f'''(x) > 0$ בסביבה של 0. הוכיחו של f אין מינימום מקומי ב $x = 0$.