פונקציה הרמונית

$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית אס"ם $u_{xx}+u_{yy}=0$.

הרמונית צמודה

$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית צמודה לu אס"ם v הרמונית וגם מקיימת יחד עם u תנאי קושי־רימן

משפט

$f=u+iv$ אנליטית $\Leftrightarrow$ u,v פונקציות הרמוניות צמודות.

תרגיל

1. האם קיימת פונקציה אנליטית f כך ש$\mathrm{Re}\,(f)=x^2y$
2. מצא פונקציה אנליטית f כך ש$\mathrm{Re}\,(f)=x^3-3xy^2$

פתרון

1. $f=u+iv$, $\mathrm{Re}\,(f)=u=x^2y$

$$\begin{matrix} u_{xx}=2y \\ u_{yy}=0 \end{matrix} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=2y\neq 0$$

$\Leftarrow$ u לא הרמונית, ולפי המשפט f לא אנליטית

2. $u=x^3-3xy^2$

$$u_{xx}=6x, u_{yy}=-6x\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$v_x=-u_y=6xy\Rightarrow v=\int 6xy\,\mathrm{d}x=3x^2y+C\,(y)$$

$$v_y=3x^2+C'\,(y)=u_x=3x^2-3y^2$$

$$C'\,(y)=-3y^2$$

$$C\,(y)=-3y^3-C_1$$

$$\boxed{v=3x^2y-y^3+C_1}$$

$$f(z) = u + iv = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right) + iC_1 = \underbrace{x^3 - 3xy^2 + i3x^2y - iy^3}_{\left[(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3\right]} = (x+iy)^3 + iC_1 = z^3 + C$$

$$\mathbb{C} \ni c = \text{const}$$

משפט

בתחום <u>פשוט־קשר</u>[1] לכל פונקציה הרמונית u, קיימת פונקציה הרמונית פשוטה.

תרגיל

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

1. נסמן $\begin{matrix} D_1 = \{(x,y) | x > 0, y \in \mathbb{R}\} \\ D_2 = \{(x,y) | x < 0, y \in \mathbb{R}\} \end{matrix}$. יש למצוא פונקציה הרמונית צמודה לu
2. האם קיימת פונקציה הרמונית צמודה ב$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

פתרון

.1

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \qquad u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$u_x = v_y \Rightarrow v = \int \frac{x}{x^2 + y^2} \mathrm{d}y = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C(x)$$

$$v_x = -u_y = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C'(x)$$

$$C'(x) = 0$$

[1] תחום פשוט־קשר זה תחום שאין בו "חורים", שכל מסלול סגור אפשר לכווץ אותו לנקודה אחת

$$C(x) = \text{const} = C_!$$

$$\boxed{v = \arctan\frac{y}{x} + C_1}$$

2. נניח כי קיימת פונקציה v הרמונית צמודה לu בתחום $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

$$v(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x>0, y\in\mathbb{R} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C & x>0, y\in\mathbb{R} \\ ? & x=0, y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

נסתכל על נק' $(0,y_1)$, $y_1 > 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} v(x,y_1) = \lim_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{y_1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} v(x,y_1) = -\frac{\pi}{2} + C$$

כיוון שv רציפה $\Leftarrow$ $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + C \Leftarrow C = \pi$

נבחר נקודה $(0,y_2)$, $y_2 < 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{y_2}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\arctan\left(\frac{y_2}{x}\right) + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

טריגונומטריה

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

זהויות

דוגמה:

$$\cos\left(z+\omega\right)=\cos z\cos\omega-\sin z\sin\omega$$

הוכחה

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}=$$

$$=\frac{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)+\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)}{4}=$$

$$=\frac{2e^{iz}\cdot e^{i\omega}+2e^{-iz}\cdot e^{-i\omega}}{4}=\frac{e^{i(z+\omega)}+e^{-i(z+\omega)}}{2}=\cos\left(z+\omega\right)$$

עוד זהויות

$$(\cos z)'_z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'_z=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=i\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

$$i=-\frac{1}{i}$$

$$(\sinh z)'=\cosh z$$

$$(\cosh z)'=\sinh z$$

ענף אנליטי

תהי $F(z)$ פונקציה רב־ערכית בתחום D. $f(z)$ נקראת ענף אנליטי של$F(z)$ אם $\forall_{z\in D} f(z)\in F(z)$ וגם f אנליטית בD.

$$\log(z)=\ln|z|+i\arg(z)$$

($\ln$ פונקציה ממשית, פועלת על $|z|\in\mathbb{R}$)
ענף עיקרי של לוגריתם:

$$\operatorname{Log}(z)=\ln|z|+i\operatorname{Arg}(z)$$

תזכורת: $\operatorname{Arg}(z):\mathbb{C}\setminus\{0\}\to[-\pi,\pi)$.

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\log(z)}$$

$$\operatorname{Log}(1-i)=\ln|1-i|+i\operatorname{Arg}(1-i)=\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Log}(1-i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$$

$$1^{a+ib}=e^{(a+ib)\log 1}=e^{(a+ib)\cdot(\ln|1|+i2\pi k)}=e^{(a+ib)(i2\pi k)}=$$

$$=e^{-2\pi kb}\left(\cos(2\pi ka)+i\sin(2\pi ka)\right)$$

תרגיל

צ"ל שלפונקציה $\log(z)$ אין ענף אנליטי ב$D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

הוכחה

נניח בשלילה כי קיים ענף אנליטי בתחום D. נסמן אותו בL.

$$L(1)=\ln 1+i\arg(1)=i\cdot 2\pi k$$

$$L\left(e^{i\theta}\right)=\ln\left|e^{i\theta}\right|+i\arg\left(e^{i\theta}\right)=i\theta+i2\pi k$$

$$\lim_{\theta\to 2\pi} L\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{\theta\to 2\pi}\left(i\theta + i2\pi k\right) = i\cdot 2\pi\left(k+1\right)$$

$$\lim_{\theta\to 2\pi} L\left(e^{i\theta}\right) = L\left(\lim_{\theta\to 2\pi} e^{i\theta}\right) = L\left(1\right) = i\cdot 2\pi k$$

קיבלנו שהגבול שונה, ולכן אין גבול, ולכן אין ענף אנליטי.