אלגברה מופשטת 1,קיץ 2013

תרגיל 10

תזכורת: תהא G חבורה. G תקרא מכפלה ישרה למחצה של H ב־K אם:

1.$K \triangleleft G$

2.$K \cap H = \{e\}$

3.$KH = G$

ומסמנים $G = K \rtimes H$.

תרגיל:

הראו כי החבורות S_3,$\mathbb{Z}_6$ הן מכפלות ישרות למחצה של תת חבורות שלהן מגודל 2 ו־3.

פתרון:

כל החבורות מסדר 2 איזו' ל־$\mathbb{Z}_2$ וכל החבורות מסדר 3 איזו' ל־$\mathbb{Z}_3$.

א. $\mathbb{Z}_6 = \{0,2,4\} \rtimes \{0,3\}$. במקרה זה מפני שהחבורה $\mathbb{Z}_6$ אבלית, ודאי ש$\{0,2,4\} \triangleleft$ $\mathbb{Z}_6$. כמו כן ע"י חישוב ישיר $\{0,2,4\} \cap \{0,3\} = \{0\}$ וגם $\mathbb{Z}_6 = \{0,2,4\} + \{0,3\}$.

ב. $S_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{=K} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{=H}$. נבדוק נורמליות: $[S_3 : K] = 2$ (לפי לגראנז') ואזי $K \triangleleft S_3$. חישוב ישיר יראה כי $K \cap H = \{id\}$. הראנו בתרגול הקודם ש$S_3 = KH$. S_3 היא מכפלה ישרה למחצה פנימית של ת"ח מסדר 3 בת"ח מסדר 2. שימו לב שהיא **לא** מכפלה ישרה למחצה פנימית של ת"ח מסדר 2 בת"ח מסדר 3, שכן אין לה תתי חבורות נורמליות מסדר 2.

מחלקות צמידות

הגדרה:תהי G חבורה ויהי $x \in G$ אז מחלקת הצמידות של x ב־G היא

$conj(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$.

תכונות:

1.מחלקות צמידות הן יחס שקילות. (הוכח בהרצאה).

2.$x \in conj(x)$.

3.Gאבלית ⇔לכל $x \in G$מתקיים $conj(x) = \{x\}$.

4.(הכללה ל3) $conj(x) = \{x\} \Leftrightarrow x \in Z(G)$.

5. $conj(e) = \{e\}$.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את מספר התמורות הצמודות לתמורה הבאה:

$$\pi=\left(\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}5&6\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}7&8\end{array}\right)\in S_8$$

<u>פתרון:</u>אנו נדרשים לחשב את $|\ conj(\pi)\ |$.האיברים ב$conj(\pi)$הן תמורות צמודות ל־πולכן בעלות אותו מבנה מחזורים. כלומר יש לבחור 4 מספרים למחזור מסדר 4 וכאלו יש לנו $\binom{8}{4}\cdot 3!$. יש לבחור את החילוף הראשון, ויש לנו $\binom{4}{2}$ אפשרויות והחילוף השני נקבע לחלוטין. סדר החילופים לא חשוב ולכן צריך לחלק ב־2 את מספר האפשרויות. סה"כ קיבלנו $\frac{\binom{8}{3}\cdot 3!\cdot\binom{4}{2}}{2!}$ תמורות שצמודות לπ.

<u>הערות:</u>

א.מחלקות הצמידות, פרט למקרה הטריוויאלי של איבר היחידה, אינן תת חבורות (לדוגמה אין את איבר היחידה באף אחת מהן).

ב.תהא G סופית אזי $|G|\ |\ |conj(x)|$. (נראה הסבר בהמשך. מדובר באינדקס המייצב של xביחס לפעולת ההצמדה)

<u>תרגיל:</u>

כמה מחלקות צמידות יש בחבורות הבאות:

א.S_4

ב.A_4

<u>פתרון:</u>

(נפתר גם בהרצאה אצל רוני).

א. מחלקות הצמידות הן: $conj(id), conj((**)), conj((***)), conj((**)(**)), conj((****))$. סה"כ $\rho(4)=5$ מחלקות צמידות.

ב. האיברים בA_4הם מהצורות: $id,(***),(**)(**)$. תמיד יש את $conj(id)$. כעת נסתכל על $A_4 \ni \sigma=\left(\begin{array}{cc}1&2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}3&4\end{array}\right)$. ב־$S_4$יש ל$\sigma$ עוד 2 איברים במחלקת הצמידות שלה ־ $\left(\begin{array}{cc}1&3\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}2&4\end{array}\right)$או $\left(\begin{array}{cc}1&4\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}2&3\end{array}\right)$. כך גם ב$A_4$. לדוגמה נחפש $A_4 \ni \pi$כך ש: $\left(\begin{array}{cc}1&3\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}2&4\end{array}\right)=\pi\sigma\pi^{-1}=\left(\begin{array}{cc}\pi_1&\pi_2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}\pi_3&\pi_4\end{array}\right)$. הדבר מתקיים עבור $\pi_1=3,\pi_2=1,\pi_3=2,\pi_4=4$ ולכן $\pi=\left(\begin{array}{ccc}1&3&2\end{array}\right)$. באופן דומה יש πכך ש$(14)(23)=\pi\sigma\pi^{-1}$. סה"כ $|\ conj(\sigma)\ |=3$. נסתכל על תמורות של

מחזורים מאורך 3 ונניח $\tau \in A_4$

$| A_4 |= \sum | conj(x) |$ ולכן $| A_4 | - | conj(id) | - | conj(\sigma) | =8$ אבל $12 \nmid 8$

לכן סדר מחלקת הצמידות של τקטן מ־8.

בחישוב ישיר: $u = (132) \in A_4$, אז $conj(u) = \{(132), (124), (234), (143)\}$ (ניתן

לעצור אחרי מציאת ארבעה איברים). יהי $v = (123) \in A_4$, $conj(v) = \{(123)(134)(142)(243)\}$.

סה:כ $| conj(u) |=| conj(v) |= 4$ בעוד ש־u, vצמודים בS_4,הם אינם צמודים בA_4. קיבלנו

שישנן 4 מחלקות צמידות בA_4.

<u>תרגיל:</u> תהא G חבורה סופית כך ש־ $|G| = p$ עבור p ראשוני. כמה מחלקות צמידות

יש ב־G?

<u>פתרון:</u> ישנן p מחלקות צמידות. $| G |= p \Leftarrow G \cong Z$ולכן ציקלית ולכן אבלית ולכן לכל

$x \in G$, $conj(x) = \{x\}$. מכאן שישנן $| G |$מחלקות צמידות.

הסבר נוסף: במקרה שלא ידענו כי G אבלית, תמיד $conj(id) = \{id\}$ולכל $x \in G$

מתקיים $|G| = p \mid |conj(x)| < p$ ולכן $| conj(x) |= 1$. מ.ש.ל

<u>תרגיל:</u>

תהא G חבורה, $\{e\} \neq N \triangleleft G$. תהא C מחלקת צמידות בG. הוכיחו: $N \cap C = \phi$או

$C \subseteq N$.

<u>פתרון:</u>

אם $N \cap C = \phi$, אז סיימנו. אחרת, נניח $x \in N \cap C$. מתקיים $x \in C$ ולכן

$C = [x] = conj(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$. אבל לכל $g \in G$ מתקיים $gxg^{-1} \in N$ כי

$x \in N$ולכן $C \subseteq N$. מ.ש.ל

<u>מסקנה:</u> תח"נ היא איחוד זר של מחלקות הצמידות של איבריה

<u>פעולה של חבורה על קבוצה</u>

<u>הגדרה:</u> תהא G חבורה, X קבוצה. פעולה של G על X היא פונקציה דו מקומית

$G \times X \to X, (g, x) \mapsto g * x$כך שמתקיים:

א.$(gh) * x = g * (h * x)$

ב.$e * x = x$

דוגמאות:

1.פעולת הכפל משמאל: אם $X=G$,אז אפשר להגדיר את הפעולה לפי $g*x=gx$.

2.$G=S_n$, $X=F[x_1,...,x_n]$ (X היא קבוצת הפולינומים ב־ n משתנים מעל F). נגדיר את הפעולה לפי:

$G*f(x_1,...,x_n)=f(x_{\sigma_1},x_{\sigma_2}...x_{\sigma_n})$.

הגדרה:מסלול (Orbit) של איבר $x\in X$ הוא $orb(x)=[x]=G*x=\{g*x:g\in G\}$.

למשל, עבור $X=G$ ופעולת ההצמדה, המסלול של כל איבר הוא מחלקת הצמידות שלו.

הערה:מסלולים הם מחלקות שקילות.

הגדרה: המייצב (Stabilizer) של $x\in X$ הוא $Stb(x)=\{g\in G:g*x=x\}$.

הגדרה: אם קיים $x\in X$ כך ש$G*x=X$ אז נאמר כי הפעולה טרנזיטיבית (אצל מגרל:הומוגנית).

טענה: $Stb(x)\leq G$ לכל$x\in X$ (הוכחתם בהרצאה).

משפט:לכל $x\in X$ מתקיים מתקיים $|G*x|=[G:Stb(x)]$. אם G סופית, אז $|G*x|=\frac{|G|}{|Stb(x)|}$.

מסקנה:$|conj(x)|\;|\;|G|$ לפי המשפט לעיל ביחס לפעולת ההצמדה.

דוגמה:תהא $X=F[x_1,x_2,x_3],G=S_3$ עם הפעולה שהוגדרה קודם. נמצא את המסלול של האיבר $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3$ ונשים לב כי $f=x_1(x_2+x_3)$. ניתן לשים לב כי $id\in Stbc(f)$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ כי הפעולה שלהם לא משנה את f. האיברים במסלול של f יהיו:$G*f=\{x_1(x_2+x_3),x_2(x_3+x_1),x_3(x_1+x_2)\}$. נשים לב שאכן מתקיים $6=|G|=|Stb(f)|\cdot|G*f|=2\cdot 3$.

תרגיל:

תהא G חבורה ונתון שקיים $e\neq g\in G$ עם מחלקת צמידות בת שני איברים. הוכיחו כי בG ישנה תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

פתרון:

לפי פעולת ההצמדה של G על עצמה נקבל כי $[G:Stb(g)]=2$ ולכן $Stb(g)\lhd G$.

תרגיל:

תהא G חבורת p סופית, כלומר $|G|=p^k$, עבור p ראשוני ונניח $H\lhd G$ כך ש$|H|=p$.
הוכיחו כי $H\subset Z(G)$.

<u>פתרון:</u>

$|H|=p$ ולכן ציקלית. נרשום $H=\langle a\rangle=\left\{e,a,a^{2},...,a^{p-1}\right\}$. מכיוון שH תח"נ, לפי תרגיל קודם כל הצמודים של a שייכים לH. לכן יהיה $g\in G$, אז קיים $1\leq i\leq p-1$ כך ש$gag^{-1}=a^{i}\in H$. מכאן שמספר הצמודים השונים של aהוא לכל היותר p-1. מצד שני, מספר הצמודים של a מחלק את $|G|=p^{k}$. לכן האפשרות היחידה היא שיש ל־a רק צמוד אחד. לכן $a\in Z(G)$ ולכן $H\subseteq Z(G)$.

מ.ש.ל. □

<u>תרגיל:</u> חשבו את מספר התמורות המתחלפות עם $\in S_n$ $\beta=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נסתכל עם פעולת ההצמדה של S_nעל עצמה: $\sigma*\beta=\sigma\beta\sigma^{-1}$. כעת נותר לחשב את $|Stb(\beta)|$. הרי $|Stb(\beta)|=\frac{|S_n|}{|S_n*\beta|}$ והרי $|S_n*p|$הוא גודל מחלקת הצמידות של p.

$S_n*\beta$ מכסה את כל התמורות מן המבנה $(**)(**)$. כמה כאלו יש?

$\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ ועל כן סה"כ: $|Stb(\beta)|=\frac{|S_n|}{|S_n*\beta|}=\frac{n!}{\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}=8\cdot(n-4)!$.

מ.ש.ל ■